1. Носачи који се састоје из 2 кинематички круте плоче, одређивање реакција ослонаца код лука на 3 зглоба за произвољно и за гравитационо оптерећење.

$\boxed{3z_p = 2z_z + z_o + z_u}$ $z_p = 2$ (бр. плоча) $z_z = 1$ (бр. зглобова) $z_o + z_u = 4$ (увек!)

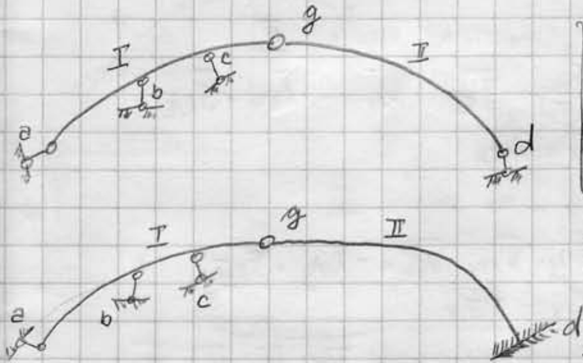
бр. ослонаца, бр. уклештења

Спољ. елементи (ослонци и уклештења) могу бити распоређени на 2 начина: I) на једној плочи имамо 3 спољ. елем. а на другој један II) на обе плоче по 2 спољ. елемента

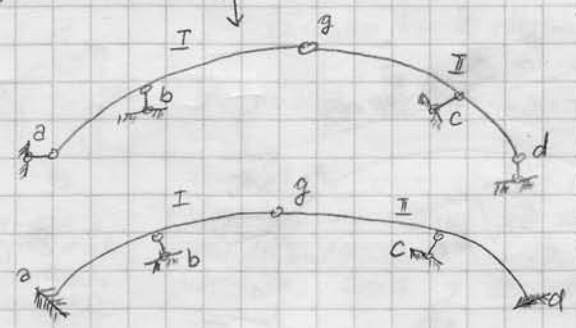
Могуће комбинације између бр. ослон. и бр. уклештења:
$z_o = 4$ $z_u = 0$; $z_o = 3$ $z_u = 1$
$z_o = 2$ $z_u = 2$. (не може мање од 2 ослонца)

Неки од основних облика:

овде ни једна плоча појединачно није стабилна, али цео систем јесте



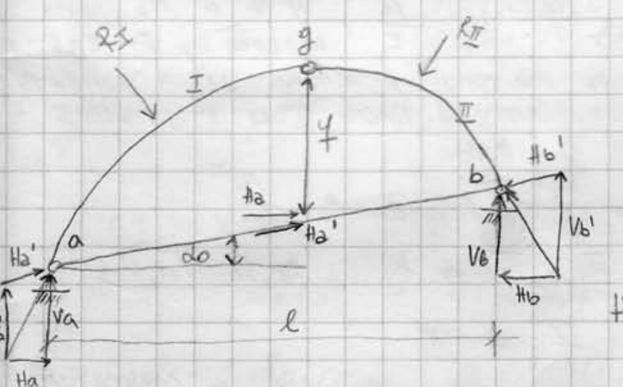
I начин распореда елемената



II нач. распореда елемената

Представник ових носача је оквир на 3 зглоба

Правци 3 ослонца се не смеју сећи у једној тачки!



За произвољно опт. р-је ослонаца A и B ће имати произвољан правац, њих можемо разложити:

$H_a = H_a'\cos\alpha_0$; $H_b = H_b'\cos\alpha_0$, $H_a' = \frac{H_a}{\cos\alpha_0}$

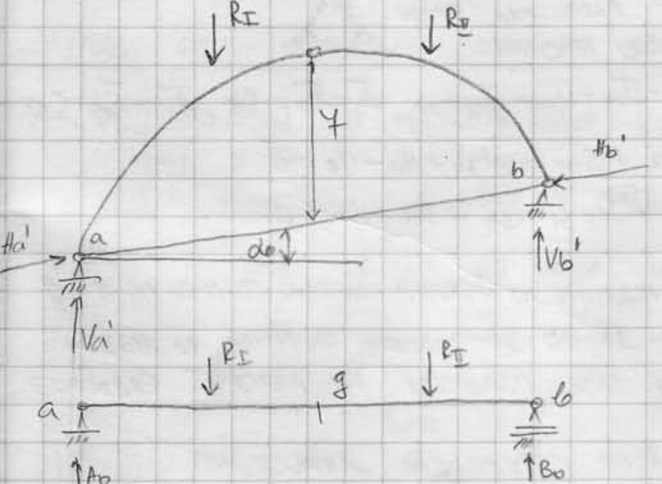
$$\boxed{\begin{aligned} V_a &= V_a' + H_a'\sin\alpha_0 = V_a' + H_a \operatorname{tg}\alpha_0 \\ V_b &= V_b' - H_b'\sin\alpha_0 = V_b' - H_b \operatorname{tg}\alpha_0 \end{aligned}}$$

$\sum M_b = 0 \Rightarrow V_a' \cdot l + M_b = 0$, M_a, M_b

$\sum M_a = 0 \Rightarrow V_b' \cdot l - M_a = 0$

$$\boxed{V_a' = -\frac{M_b}{l} \quad V_b' = \frac{M_a}{l}}$$

$H_a = \frac{M_g^{I}}{f}$, $H_b = \frac{M_g^{II}}{f}$, $\underbrace{M_g^{I} \oplus \quad M_g^{II} \oplus}_{\text{да би важила ова 2 израза}}$



Код грав. опт V_a', V_b' исте као реакције кореспондентне просте греде.

$H_a' = H_b' = H'$

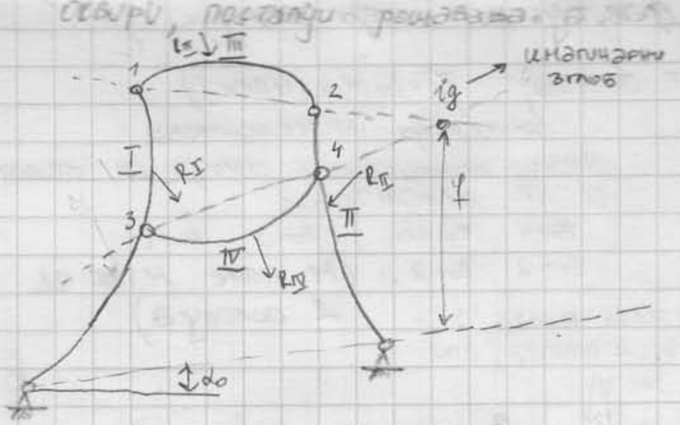
$H_a = H_b = H$

$V_a' = -\frac{M_b}{l}$ $V_a' = A_0$

$V_b' = \frac{M_a}{l}$ $V_b' = B_0$

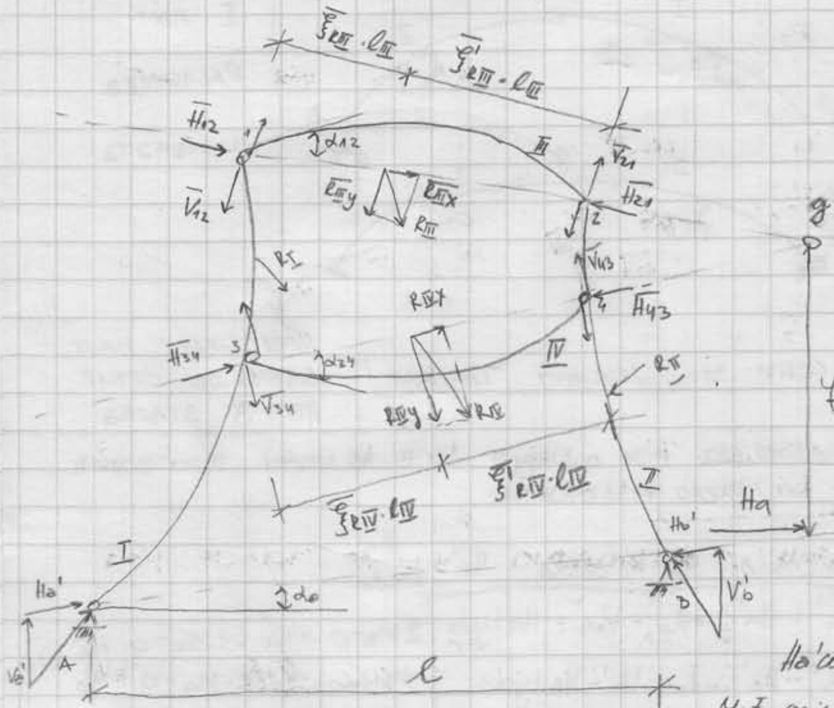
$H = \frac{M_{g_0}}{f}$ – момент одговарајуће п.г. у тачки g_0

сабири, поставити решавање...



Имамо 4 круте плоче ⇒ 12 непознатих. У непознате улазе 4 реакције ослонаца и 2x4 = 8 непознатих сила веза у зглобовима 1-4.

Лоша скица: α_{12} и α_{34} углови између исцртаних линија (1-2 и 3-4) и хоризонтале!!



Услови равнотеже плоче III

$\overline{V_{12}} = \overline{R}_{IIIy}\cdot\bar{\xi}'_{RIII}$ $\overline{V_{21}} = -\overline{R}_{IIIy}\cdot\bar{\xi}_{RIII}$

$\overline{H_{12}} - \overline{H_{21}} = \overline{R_{III x}}$

Свеисто и за плочу IV

$\overline{V_{34}} = \overline{R_{IVy}}\cdot\bar{\xi}'_{RIV}$ $\overline{V_{43}} = -\overline{R_{IVy}}\cdot\bar{\xi}_{RIV}$

$\overline{H_{34}} - \overline{H_{43}} = \overline{R_{IV x}}$

Овим ј-нама налазимо $\overline{V_{12}}, \overline{V_{21}}, \overline{V_{34}}, \overline{V_{43}}$

V_a' и V_b' налазимо из услова да су моменти спољ. сила у тачкама a и b нула.

$V_a' = -\frac{M_b}{l}$; $V_b' = \frac{M_a}{l}$, у M_a и M_b улазе моменти од $R_I, R_{II}, R_{III}, \ldots$

H_a' и H_b' налазимо из услова да су моменти сила који делују на плоче I и II у односу на тачку g нула.

$H_a'\cos\alpha_0 = H_a = \frac{M_g^{I}}{f}$ $H_b'\cos\alpha_0 = H_b = \frac{M_g^{II}}{f}$

M_g^{I} дају $R_I, V_a', \overline{V_{12}}$ и $\overline{V_{34}}$ а M_g^{II} : $R_{II}, V_b', \overline{V_{21}}, \overline{V_{43}}$

$\overline{H_{12}}, \overline{H_{21}}, \overline{H_{34}}, \overline{H_{43}}$ налазимо из услова равнотеже плоча I и II

$$\left.\begin{aligned} &\overline{H_{12}}\cos\alpha_{12} + \overline{H_{34}}\cos\alpha_{34} - \overline{V_{12}}\sin\alpha_{12} + \overline{V_{34}}\sin\alpha_{34} + H_a + H_b = 0 \\ &\overline{H_{12}}\sin\alpha_{12} - \overline{H_{34}}\sin\alpha_{34} + \overline{V_{12}}\cos\alpha_{12} + \overline{V_{34}}\cos\alpha_{34} - V_a + V_b = 0 \end{aligned}\right\}$$

услови равнотеже плоче I (налазимо $\overline{H_{12}}$ и $\overline{H_{34}}$)

$\overline{H_{21}}$ и $\overline{H_{43}}$ налазимо из услова равнотеже плоче II

Услови равнотеже плоча III и IV представљају контролу рачуна!

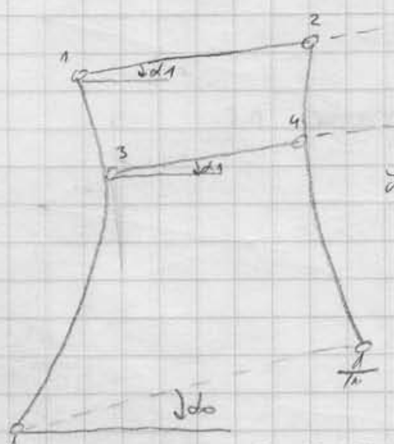
Често плоче III и IV нису опт. → $R_{III} = R_{IV} = 0$, $\overline{V_{12}} = \overline{V_{21}} = \overline{V_{34}} = \overline{V_{43}} = 0$, $\overline{H_{12}} = \overline{H_{21}} = S_{III}$, $\overline{H_{34}} = \overline{H_{43}} = S_{IV}$

Тада услови равнотеже за плочу I гласе:

$S_{III}\cos\alpha_{12} + S_{IV}\cos\alpha_{34} + H_a + H_b = 0$

$S_{III}\sin\alpha_{12} - S_{IV}\sin\alpha_{34} - V_a + V_b = 0$

Кад су праве 1-2 и 3-4 паралелне:



$i_g \to \infty$ H_a' и H_b' не налазимо из услова да су моменти у g једнаки нули већ да су компоненте нормалне на праву 1-2 односно 3-4 свих сила које нападају на плочу I односно II једнаке нули.

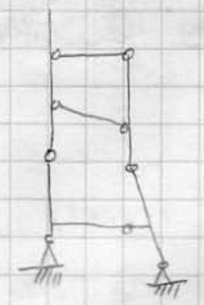
Ако III и IV нису оптерећене добијамо:

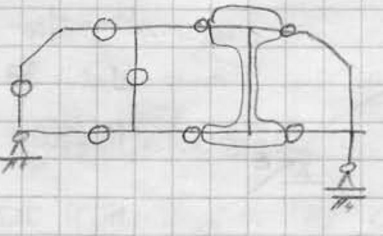
$$H_a'\sin(\alpha_1-\alpha_0) = H_a\frac{\sin(\alpha_1-\alpha_0)}{\cos\alpha_0} = V_a'\cos\alpha_1 - R_I'$$

$$H_b'\sin(\alpha_1-\alpha_0) = H_b\frac{\sin(\alpha_1-\alpha_0)}{\cos\alpha_0} = R_{II}' - V_b'\cos\alpha_1$$

$\alpha_1 \neq \alpha_0$ (иначе би систем био у критичној конфигурацији)

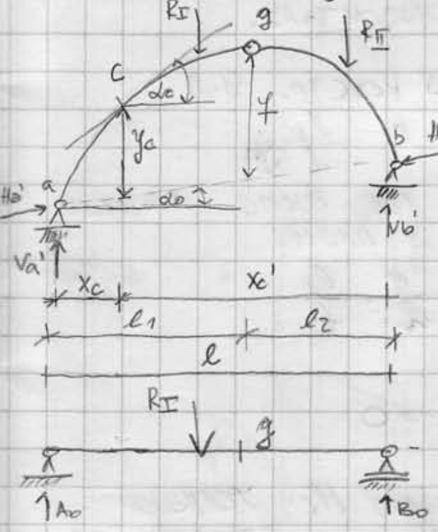
При решавању вишеспратних оквира примењујемо методу декомпозиције, што значи да ово решавамо парове зглобно везаних плоча и преносимо реакције са вишег на нижи део носача, да би до прорачуна ослонаца дошли тек на крају. Увек нам једна плоча служи за контролу.





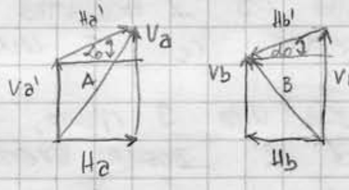
Код призменог оквира контрола је да плоча која нам је остала буде у равнотежи.

3. Изрази за реакције и силе у пресецима пуног лука са 3 зглоба при гравитац. оптерећ.



правац ab' - правац лучне силе

f - стрела лука



$H_a = H_a'\cos\alpha_0$, $V_a = V_a' + H_a'\sin\alpha_0 = V_a' + H_a\operatorname{tg}\alpha_0$

$H_b = H_b'\cos\alpha_0$, $V_b = V_b' - H_b'\sin\alpha_0 = V_b' - H_b\operatorname{tg}\alpha_0$

H_a', H_b' - лучне силе у ослонцима a и b

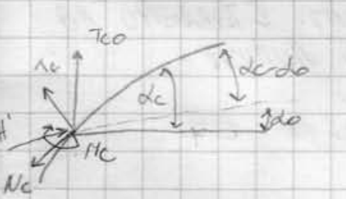
H_a, H_b - хоризонтални потисци лука

При вертик. опт имамо да је $H = H_a = H_b$ и онда из услова да је момената свих сила које делују на једну од плоча у односу на зглоб g једнак нули налазимо:

$$H = \frac{M_{g0}}{f}$$

сила бочног потиска

кореспондентна проста греда $V_a' = -\frac{M_b}{l} = A_0$ $V_b' = \frac{M_a}{l} = B_0$



У пресеку „c" тражимо пресечне силе, одбацујемо све силе лево од пресека и вршимо редукцију сила.

T_{c0} - транс. сила одговарајуће просте греде

$M_c = M_{c0} - H\cdot y_c$ M_{c0} - момент кореспондентне греде у коју су уведени A_0 и оптерећење

$$T_c = T_{c0}\cos\alpha_c - H'\sin(\alpha_c-\alpha_0) = T_{c0}\cos\alpha_c - H\cdot\underbrace{\frac{\sin(\alpha_c-\alpha_0)}{\cos\alpha_0}}_{t_c} = T_{c0}\cos\alpha_c - H\cdot t_c, \quad H' = \frac{H}{\cos\alpha_0}$$

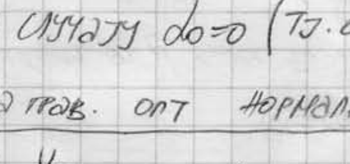
$$N_c = -T_{c0}\sin\alpha_c - H'\cos(\alpha_c-\alpha_0) = -T_{c0}\sin\alpha_c - H\underbrace{\frac{\cos(\alpha_c-\alpha_0)}{\cos\alpha_0}}_{n_c} = -T_{c0}\sin\alpha_c - H\cdot n_c$$

$t_c = \sin\alpha_c - \operatorname{tg}\alpha_0\cdot\cos\alpha_c$ $n_c = \cos\alpha_c + \operatorname{tg}\alpha_0\sin\alpha_c$

У случају $\alpha_0 = 0$ (тј. ослонци су на истој висини): $M_c = M_{c0} - H\cdot y_c$, $T_c = T_{c0}\cos\alpha_c - H\sin\alpha_c$, $-N_c = T_{c0}\sin\alpha_c + H\cos\alpha_c$

За грав. опт нормална сила је увек ⊖, тј лук ће увек бити притиснут!!!

4. Утиц. линија за M-савијање код лука на три зглоба.



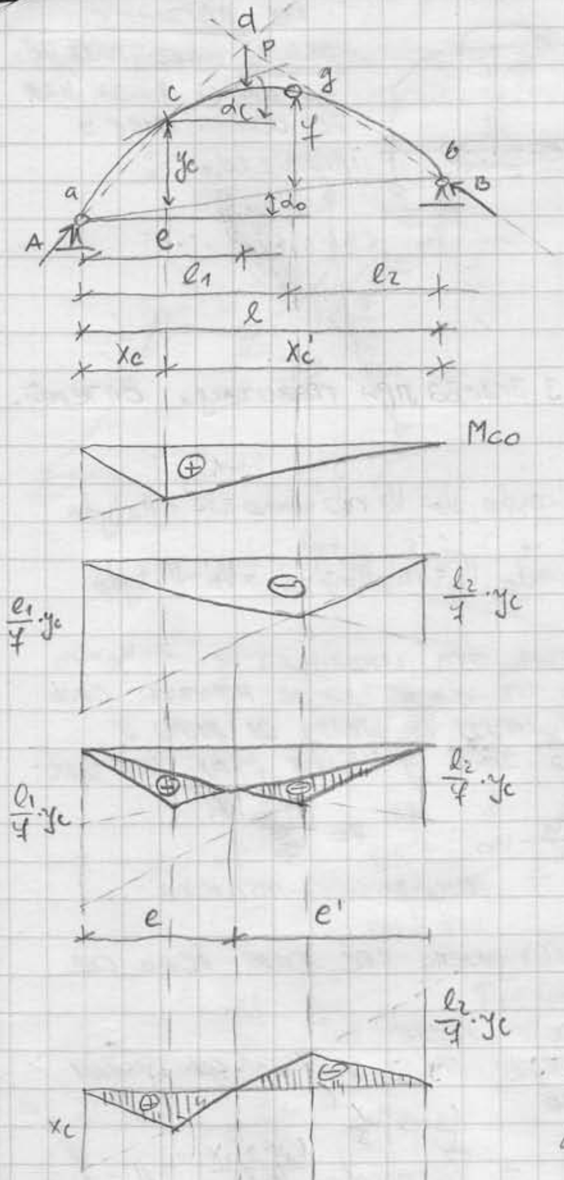
Кад је опт. вертикално (што је најчешћи случај) утиц. линије V_a' и V_b' су исте као за просту греду.

$H = \frac{M_{g0}}{f}$ => У.Л. за H (хоризонтални потисак лука) слична у. линији за M просте греде (само што је подељена са f)

$$\max H_p = p\frac{l_1 l_2}{2f}$$

$M_c = M_{co} - H\cdot y_c$, од У.Л. за просту греду одузимам
У.Л. за H (помножену са y_c),

постоји нулта тачка (разделница)



ППТ јединична сила између с и g, у пресеку ac и bg наћи ће се тачка d која је нулта тачка, ту мора деловати $P=1$.

Утиц. линију враћамо на хоризонталу.

Потребна су 2 податка за констр. У.Л
1. одсечак x_c 2. ишпод в $\frac{l_2}{f}\cdot y_c$

Наша У.Л. има 3 гране, јер кад бисмо пресекли лук у „С" добили бисмо 3 плоче.

$V_a' = \frac{l-e}{l}$ $V_b' = \frac{e}{l}$ $H = \frac{e}{l}\cdot\frac{l_2}{f}$

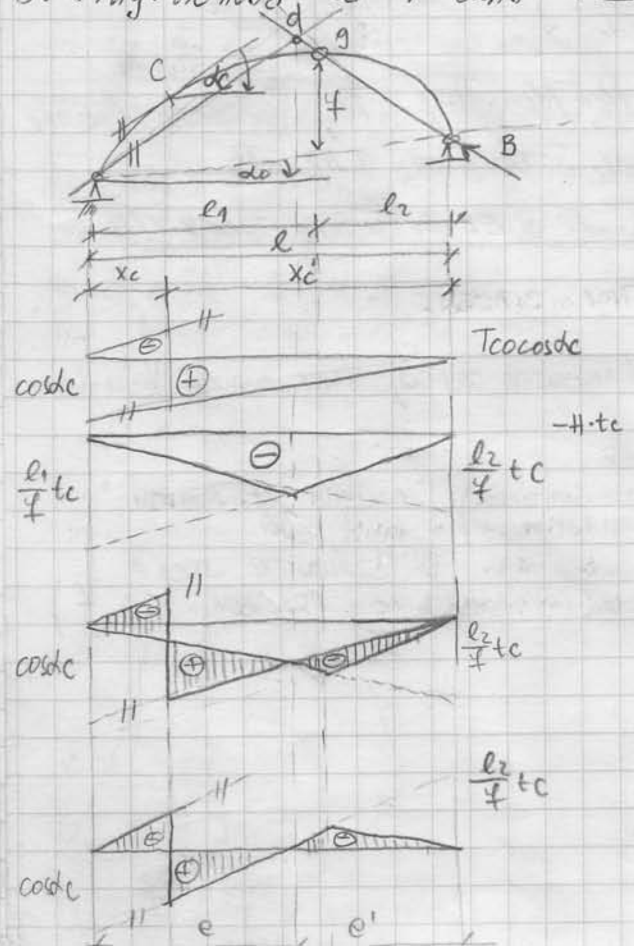
$$M_c = \frac{l-e}{l}\cdot x_c - \frac{e\cdot l_2}{l\cdot f}\cdot y_c = 0$$

$$\boxed{e_H = \frac{l}{1+\frac{l_2}{f}\cdot\frac{y_c}{x_c}}}$$

Максимално M_c - једнако поделено опт. стављамо на ⊕ део ут. линије.

max H се јавља кад је оптерећен ad
min H кад је оптерећен db

5. Утиц. линија за T-силу код лука на три зглоба.



$$T_c = T_{co}\cos\alpha_c - H t_c$$

ППТ да је сила на делу c-g

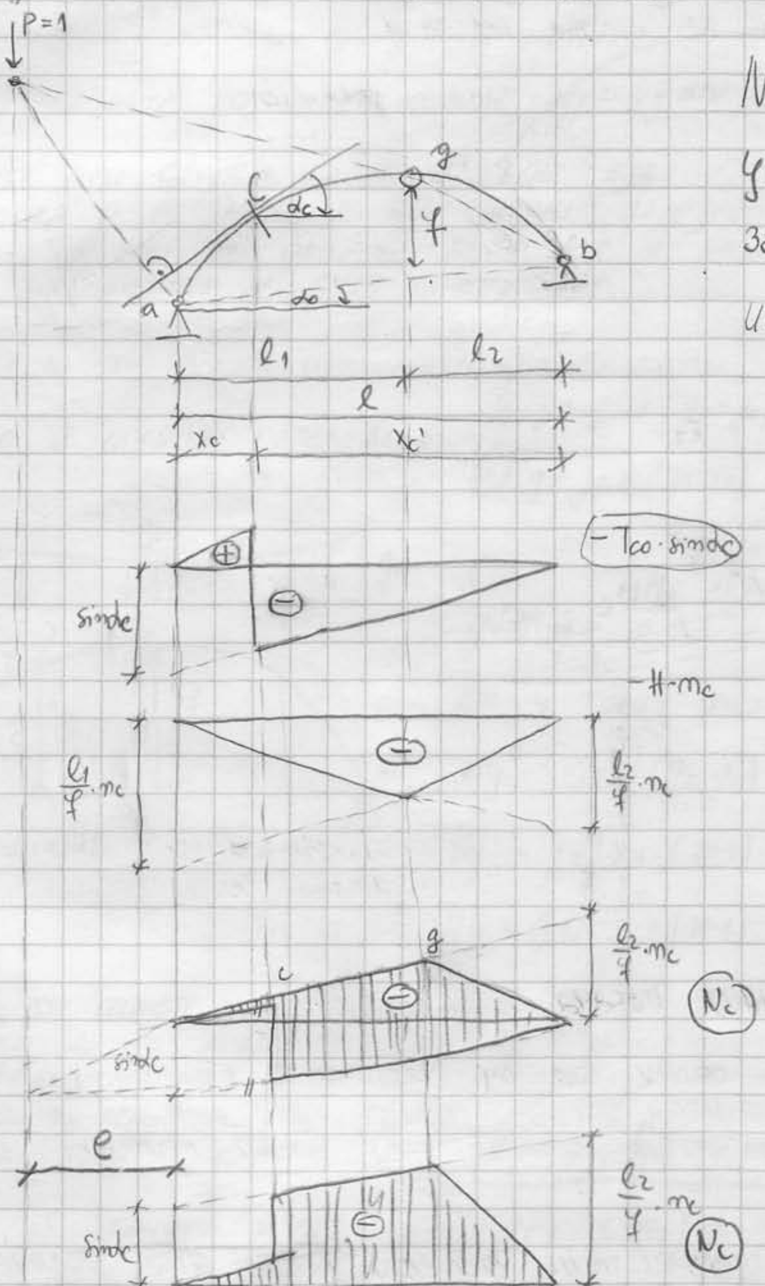
Да би T била нула, сила T мора бити ∥ са тангент

Преклапано 2 утиц. линије

$$T_c = \frac{l-e}{l}\cos\alpha_c - \frac{e l_2}{l\cdot f} t_c = 0$$

$$\boxed{e_T = \frac{l}{1+\frac{l_2}{f}\frac{t_c}{\cos\alpha_c}}}$$

6. Утицајна линија за N-силу код лука на три зглоба



$$N_c = -T_{co}\cdot\sin\alpha_c - H\cdot m_c$$

Цртамо у.л. на сличан начин као за (H) и (T) полазећи од горњег израза.

- Кад нападна линија P=1 пролази кроз тачку d али се при томе утицај преноси на део c-g реакције лука су:

$$V_a' = \frac{l+e}{l},\quad V_b' = -\frac{e}{l},\quad H = -\frac{e}{l}\cdot\frac{l_2}{f}$$

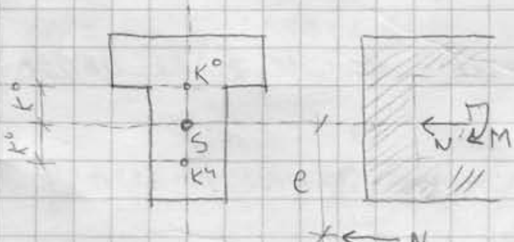
Норм. сила у пресеку C је 0 =>

$$N_c = -\frac{l+e}{l}\sin\alpha_c + \frac{e}{l}\cdot\frac{l_2}{f}\cdot m_c = 0 \Rightarrow$$

Налазимо одстојање нулте тачке од ослонца a: $\boxed{e_0 = \dfrac{l}{\frac{l_2}{f}\cdot\frac{m_c}{\sin\alpha_c} - 1}}$

- У луку је увек притисак!!

7. Конструкција у. линија у односу на тачке језгра пресека код лука на три зглоба



ППТ: у пресеку делују норм. сила и моменат, то замењујемо дејством нормалне силе која ексцентрично делује у односу на пол пресек.

$e = \frac{M}{N}$, ивични напони у пресеку $\sigma^o = \frac{N}{F} - \frac{M}{W^o}$ – отпорни моменат

$$\sigma^u = \frac{N}{F} + \frac{M}{W^u}$$

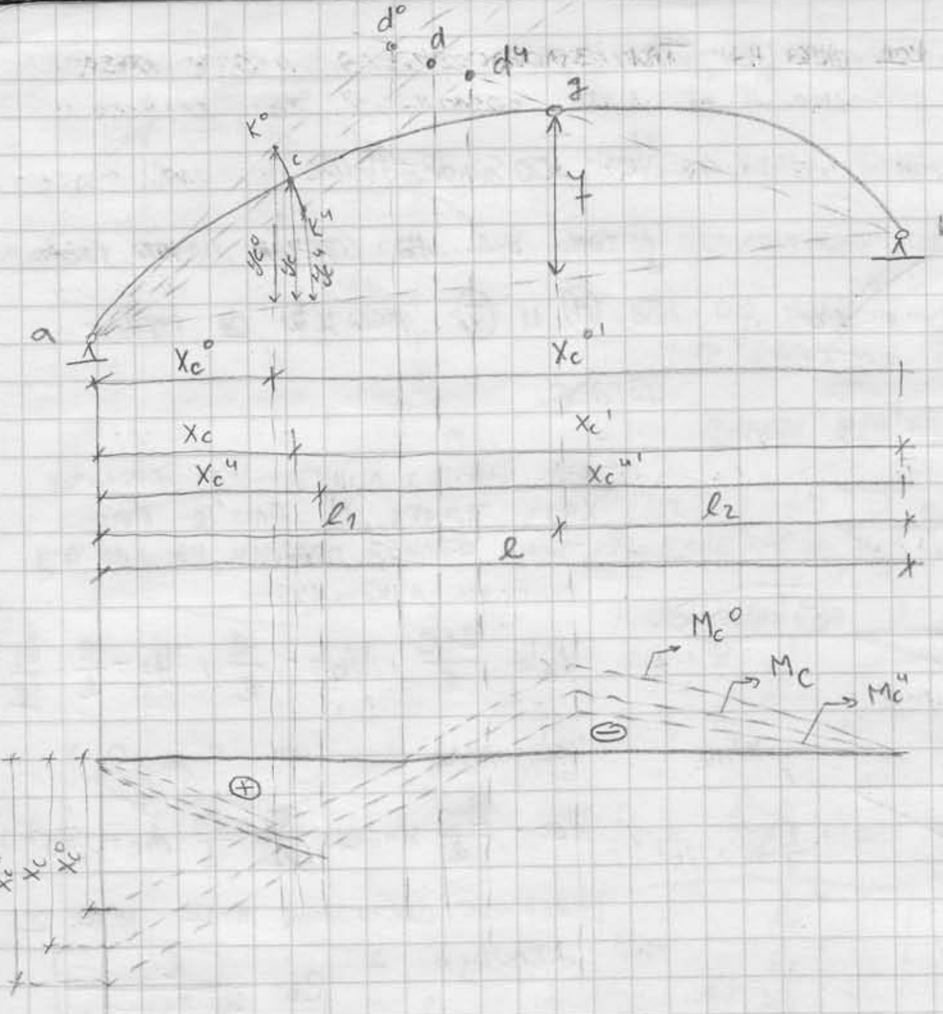
K^o, K^u – горња и доња ивица језгра пресека

Из ова 2 израза видимо да се екстр вредности ивичних напона неће јавити ни при екстр вредности норм силе ни при екстр вредности момента савијања.

Трансформацијом израза ивичне напоне изражавамо преко M^u и M^o који зависе од K^u и K^o.

$$\sigma^o = \frac{N}{F} - \frac{M}{W^o} = \frac{N}{W^o}\left(\frac{W^o}{F} - \frac{M}{N}\right) = \frac{N}{W^o}\left(K^u - e\right) = -\frac{M^u}{W^o}$$

$$\sigma^u = \frac{N}{F} + \frac{M}{W^u} = \frac{N}{W^u}\left(\frac{W^u}{F} + \frac{M}{N}\right) = \frac{N}{W^u}\left(K^o + e\right) = \frac{M^o}{W^u}$$



8. Рационални облик осе лучних носача

- Рационални облик осе лука је такав облик где су екстремне вредности напона у горњим и доњим влакнима једнаки. Правилним избором облика лука добијамо да су сви моменти једнаки нули, то је згодно јер се јављају само напони притиска и не мора да се ставља арматура!

- Кад је носач оптерећен <u>сталним оптерећењем</u> екстремне вредности напона биће једнаке ако лук има облик <u>резултантног полигона</u> за то оптерећење.

- Кад је носач оптерећен <u>подељеним оптерећењем</u> резултантни полигон прелази у криву коју називамо <u>потпорна линија</u>.

- Кад је носач оптерећен <u>и сталним и покретним оптерећењем</u> најбоље је за облик лука узети <u>потпорну линију</u>.

- Облик осе лука одређујемо или графички (што не даје довољну тачност) или аналитички односно рачунски.

- Ординате потпорне линије одређујемо из услова да моменти савијања с обзиром на тежиште попречног пресека буду једнаки нули. Код лука на три зглоба тај се услов при грав. опт. своди на следеће: $M_0 - H \cdot y = 0$, $H = \frac{M_{g0}}{f}$ $\Rightarrow$ $\boxed{y = \frac{M_0}{M_{g0}} f}$

Из горње три једначине закључујемо да је <u>рационални облик осе лука са три зглоба аналоган са обликом дијаграма момената савијања</u> одговарајуће просте греде оптерећене датим оптерећењем, а да <u>облик осе не зависи од интензитета оптерећења</u> већ од закона по коме се оно мења дуж носача.

Кад је опт. једнако подељено интензитета g моменти савијања просте греде су $M_0 = \frac{gl^2}{2}\omega_R$, $\omega_R = \xi - \xi^2$, а момент на средини распона l тада износи $M_0 = \frac{gl^2}{8}$ па су ординате потпорне линије $y = 4f\omega_R$, тј. рац. облик осе лука је кв. параб.

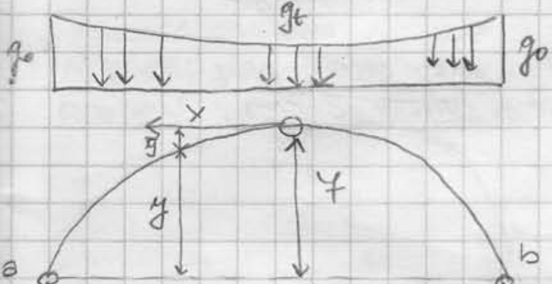
- Тешкоће при одређивању облика осе лука су у томе што стално опт. зависи од облика и не може да буде тачно одређено док облик лука није познат. Поступак понављамо онолико пута док се не поклопе потпорна линија и лук облик или разлике не буду занемарљиве.

- Ако лук на три зглоба има облик кв. параболе онда ће моменти бити нула!

Узимамо 2 случаја оптерећења

① $g = g_t + (g_0 - g_t)\left(\frac{x}{l_1}\right)^2$ g_t - оптерећење лука у темену

② $g = g_t + (g_0 - g_t)\frac{\bar{y}}{f}$ g_0 - оптерећење лука у ослонцу, $y + \bar{y} = f$



$$y = f - \bar{y} = \frac{M_0}{H} \xRightarrow{2x\ \text{дифер.}} H\frac{d^2\bar{y}}{dx^2} = -\frac{d^2 M_0}{dx^2} = g \qquad (A)$$

Кад у горњу ј-ну унесемо ①

$$H\bar{y}'' = g_T + (g_0 - g_t)\left(\frac{x}{l_1}\right)^2 = g_T\left[1 + (\varkappa - 1)\left(\frac{x}{l_1}\right)^2\right], \quad \varkappa = \frac{g_0}{g_T}$$

$$H\bar{y}' = g_T\left[x + (\varkappa - 1)\frac{x^3}{3l_1^2}\right] + C_1$$

$$H\bar{y} = g_T\left[\frac{x^2}{2} + (\varkappa - 1)\frac{x^4}{12l_1^2}\right] + C_1 x + C_2$$

- Ако је лук симетричан у односу на $\bar{y}$ осу, из услова да је за $\xi = 0$: $\bar{y} = 0$ и $y' = 0$ добијамо да су константе C_1 и C_2 нула.

Хоризонталан потисак H је одређен условом да оса пролази кроз тачку a, тј. да је за $\xi = 1$: $\bar{y} = f$ па је $H = \frac{g_t l_1^2}{12f}(5 + \varkappa) \Rightarrow \boxed{\bar{y} = \frac{f}{(5+\varkappa)}\xi^2\left[6 + (\varkappa - 1)\xi^2\right]}$, $\xi = \frac{x}{l_1}$ → облик рационалне осе лука

Када (A) убацимо у ②: $H\bar{y}'' = g_T + (g_0 - g_T)\frac{\bar{y}}{f} \Rightarrow \bar{y}'' = \frac{g_T}{H} + \frac{g_0 - g_T}{H \cdot f}\cdot\bar{y}$, $c^2 = \frac{g_0 - g_T}{H \cdot f}$

$y'' - c^2\bar{y} = c^2\frac{f}{\varkappa - 1}$ ⇒ опште решење ове ј-не: $\bar{y} = C_1 \cdot ch\,cx + C_2 \cdot sh\,cx - \frac{f}{\varkappa - 1}$

из услова да је за $\xi = 0$: $\bar{y} = 0$, $\bar{y}' = 0$ налазимо $C_1 = \frac{f}{\varkappa - 1}$, $C_2 = 0$ и онда добијамо:

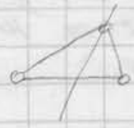
$\boxed{\bar{y} = \frac{f}{(\varkappa - 1)}\cdot(ch\,cx - 1)}$, вредност константе C (тј. вредност хоризонталног потиска H одређујемо из услова да је за $\xi = 1$, $\bar{y} = f$: $ch\,c = \varkappa$, $c = Arch\,\varkappa$

односно: $H = \frac{g_t(\varkappa - 1)}{f}\cdot\left(\frac{l_1}{Arch\,\varkappa}\right)^2$

Када познајемо положаје a и b и стрелу f могуће је одредити рационалну осу.

9. Носачи који се састоје из ланца плоча. Герберови носач, конструкција утицајних линија, дијаграм extr вредности сила у пресецима.

- Носач који се састоји из ланца плоча представља низ плоча повезаних одговарајућим зглобовима тако да један пресек кроз зглоб дели овај ланац плоча на два независна дела.



није ланац плоча

Z_p - број плоча

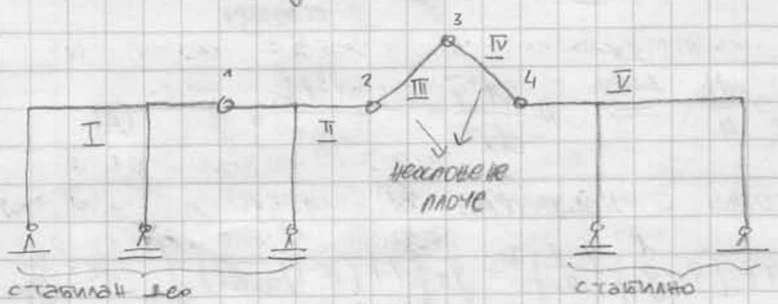
$Z_z = Z_p - 1$ - број зглобова

број ослонаца, број уклештења

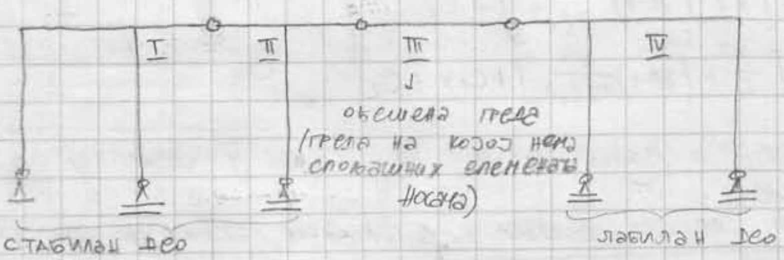
Критеријум за кинематичку стабилност плоча: $3Z_p = Z_o + Z_u + 2Z_z \Leftrightarrow 3Z_p - 2Z_p + 2 = Z_o + Z_u$

$\boxed{Z_p + 2 = Z_o + Z_u}$ ово мора да важи да би ланац плоча био статички одређен

Неки примери ланаца плоча:

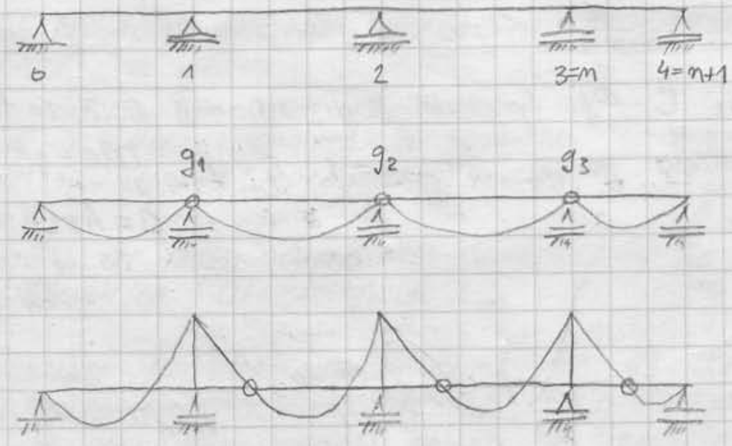


$Z_o + Z_u = 7$ да би једна плоча била стабилна мора имати 3 спољ. елемента



Најпознатији представник оваквог типа носача је Герберов носач.

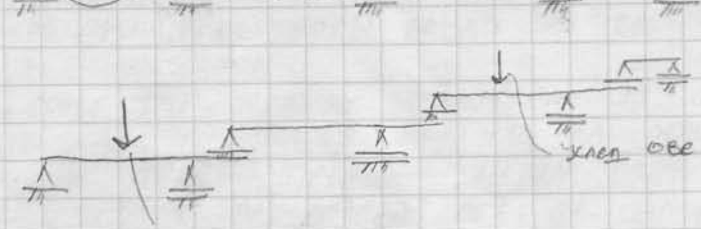
- Герберов носач је систем који се састоји од простих греда и греда са препустима. Распоред зглобова може бити различит али такав да систем буде стабилан - не смеју се поставити 3 зглоба у једно поље, нити по 2 зглоба у 2 суседна поља.



Греда која је ослоњена на више од 3 ослонца је m пута статички неодређена. Овакав носач се назива континуални носач. Он је непожељан због напона који би се појавили услед померања ослонаца или температурне промене.

Да би систем учинили стабилним убацујемо m зглобова. Зглобове можемо убацити над m ослонаца међутим то није економ. решење.

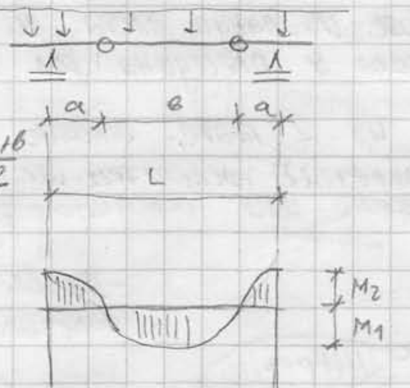
Економичније решење се постиже уметањем зглобова између ослонаца уз поштовање горе 2x подвученог правила. Овакав тип носача зове се Герберов носач.



услед ове силе лево има утицаја десно не.

Ако се оптерећење налази на неком од стабилних делова, оно ће само ту и постојати

РАСПОРЕД ЗГЛОБОВА МОЖЕ БИТИ ТАКАВ ДА СУ МОМЕНТИ НАД ОСЛОНЦИМА ЈЕДНАКИ МОМЕНТИМА У ПОЉУ.



$L = 2a + b$

$$M_1 = \frac{qb^2}{8}, \quad M_2 = -\left(\frac{qb}{2}a + \frac{q\cdot a^2}{2}\right) = -q\cdot a \cdot \frac{a+b}{2}$$

$$\frac{q(L-2a)^2}{8} = \frac{q\, a(L-a)}{2} \Rightarrow 8a^2 - 8aL + L^2 = 0$$

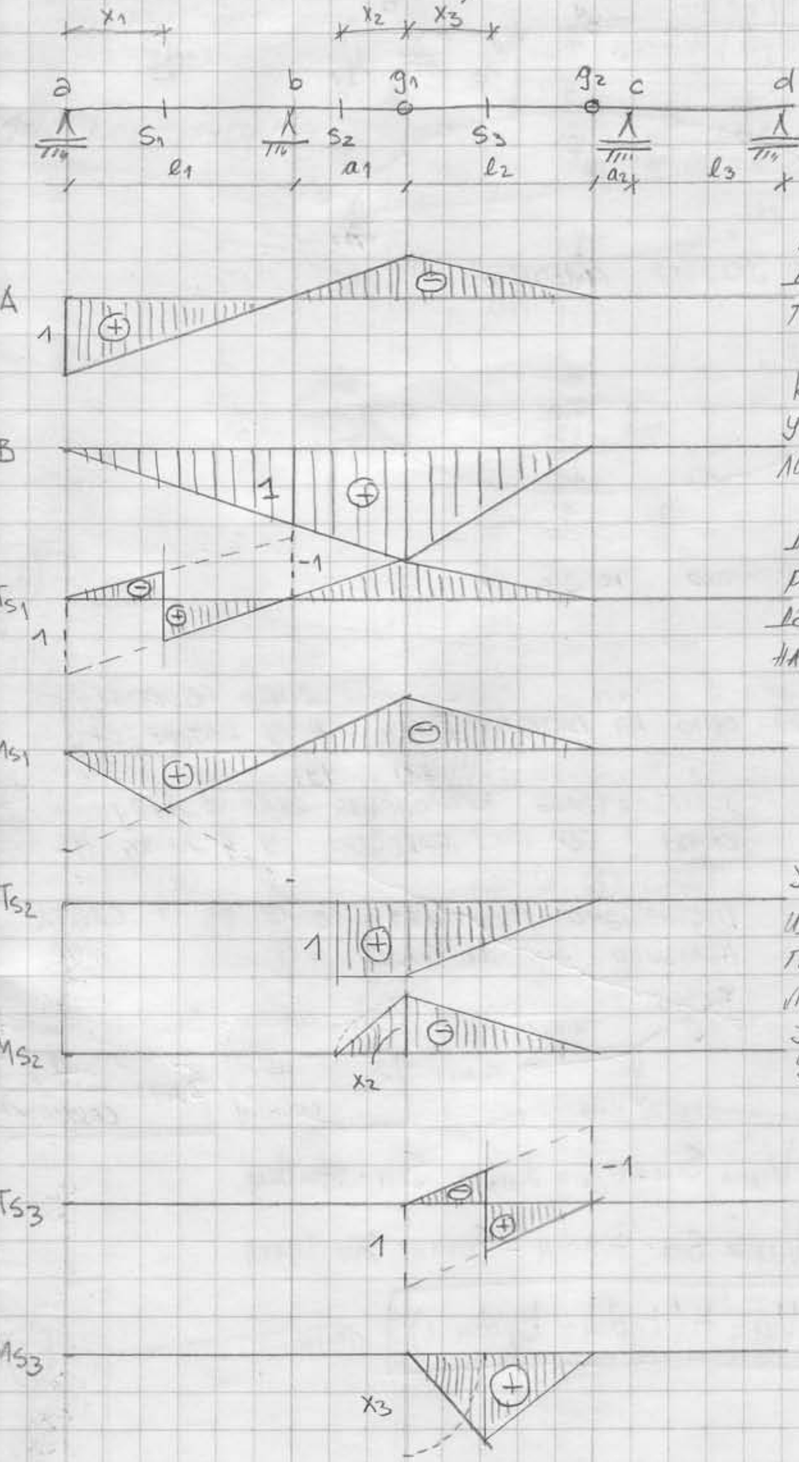
$$a = \alpha L, \quad \alpha^2 - \alpha + \frac{1}{8} = 0, \quad \alpha = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\alpha < \frac{1}{2} \qquad \boxed{a = 0{,}146L \qquad b = 0{,}707L}$$

$$M_1 = M_2 = \frac{qL^2}{16}$$

Утицајне линије:

- Реакције ослонаца и силе у пресецима гербера зависе од распореда зглобова и положаја оптерећења. Утицај се са лабилних преноси на стабилне делове.



На сл. је приказан герер од 2 просте греде са препустима ag_1 и g_2d и једне обешене просте греде g_1g_2

Утицајне линије за реакције ослонаца A и B и силе у пресецима S_1 и S_2 на делу ag_1 идентичне су са утицајним линијама греде са препустом ag_1.

Како оптерећење плоче g_2d не изазива утицаје на делу то су ординате утицајних линија у зглобу g_2 једнаке нули.

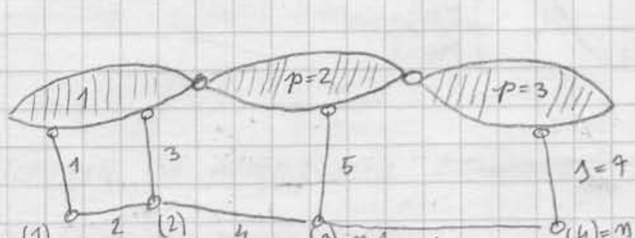
Дуж обешене греде g_1g_2 утицајне линије за реакције и силе у пресецима дела ag_1 мора да буду праве зато што се права линија налази дуж круте плоче.

Утицајне линије за силе у пресеку S_3 идентичне су са утицајним линијама просте греде g_1g_2 распона l_2 и не настављају се лево од зглоба g_1, односно десно од зглоба g_2 јер оптерећење делова ag_1 и g_2d не изазива утицаје у обешеној греди g_1g_2.

За C и D исто само пресликано!

10. Носачи који се састоје из ланца плоча и низа простих штапова. Одређивање реакција ослонаца и сила у пресецима код висећег моста.

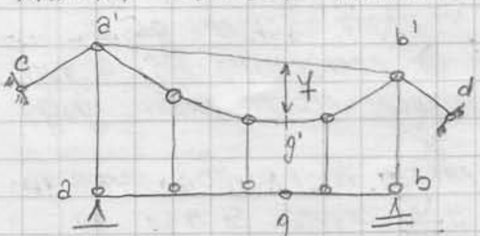
- систем који се састоји из 2 праве зглобно везане греде ослоњене једним покретним и једним непокретним лежиштем је лабилан. Он може да се учини стабилним ако греде обесимо или ослонимо на систем зглавкасто везаних простих штапова.



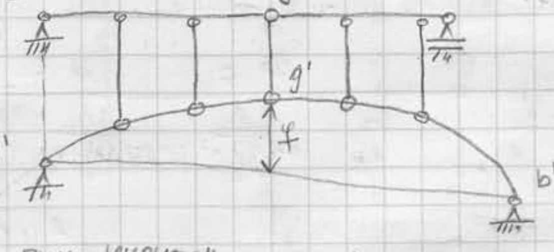
- На сл. је ланац од p плоча са којим је повезано n чворова са s простих штапова.

ланац од p плоча има p+2 степена слободе померања, а n чворова имају 2n степени слободе померања стога да би систем био кинематички просто стабилан мора да важи следеће: $\boxed{Z_0+Z_1+S = p+2+2n}$, зато што сваки штап, ослонац и укљештење укида по један степен слободе кретања.

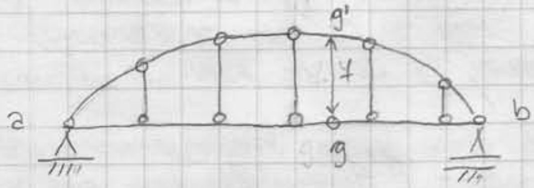
Примери оваквих носача:



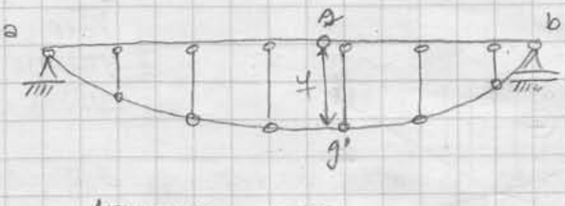
Висећи (ланчани) мост



Лук укрућен гредом

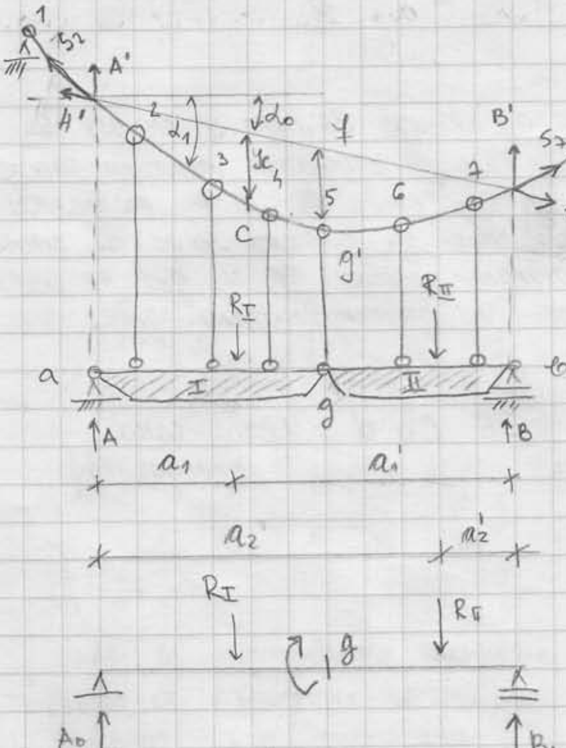


Лук укрућен гредом (Лангерова греда)



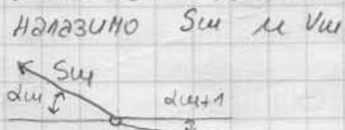
Армирана греда

Висећи мост (пат да се оптерећење јавља само на плочама I и II, док чворови нису оптерећени)



- Хоризонтална компонента силе у ланцу је const! Све силе одређујемо у ф-ји од H.

Постављамо равнотежу чвора m и одатле налазимо S_m и V_m.



$S_m\cdot\cos\alpha_m = S_{m+1}\cdot\cos\alpha_{m+1} =$

$\boxed{S_m = \frac{H}{\cos\alpha_m}}$ $\boxed{S_{m+1} = \frac{H}{\cos\alpha_{m+1}}}$

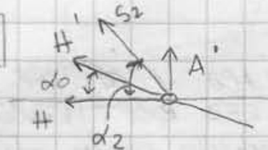
$$V_m + S_{m+1}\cdot\sin\alpha_{m+1} = S_m\cdot\sin\alpha_m$$

$$V_m = S_m\cdot\sin\alpha_m - S_{m+1}\cdot\sin\alpha_{m+1}$$

$$\boxed{V_m = H(\mathrm{tg}\,\alpha_m - \mathrm{tg}\,\alpha_{m+1})}$$

Да бисмо одредили реакције, пресецамо ланац у тачкама a' и b' изнад ослонца a и b.

a'



$H = H'\cos\alpha_0 \Rightarrow H' = \frac{H}{\cos\alpha_0}$

$A' = S_2 \sin\alpha_2 - H\,tg\alpha_0$

$\boxed{A' = H(tg\alpha_2 - tg\alpha_0)}$

b' Слично

$\boxed{B' = H(tg\alpha_0 - tg\alpha_m)}$

Реакције веза просте греде

$$\sum M_B = 0:\ A_0 = A + A' = \frac{1}{l}(R_I \cdot a_1' + R_{II} \cdot a_2') \Rightarrow A = A_0 - A' \Rightarrow \boxed{A = A_0 - H(tg\alpha_2 - tg\alpha_0)}$$

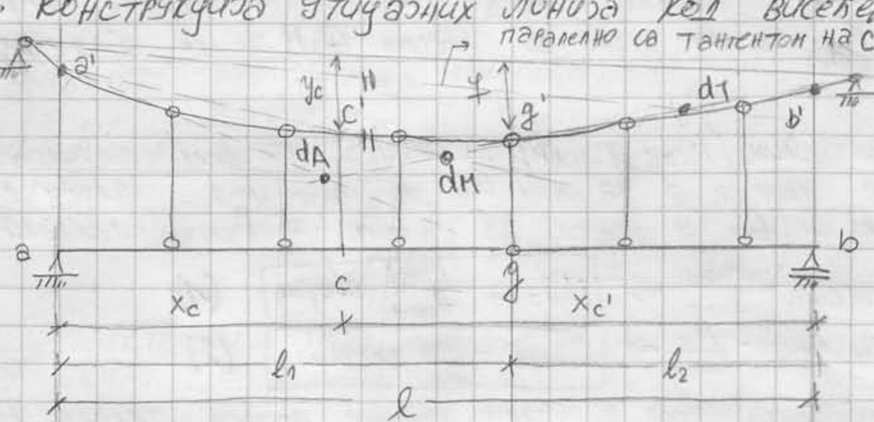
$$\sum M_A = 0:\ B_0 = B + B' = \frac{1}{l}(R_I \cdot a_1 + R_{II} \cdot a_2) \Rightarrow B = B_0 - B' \Rightarrow \boxed{B = B_0 - H(tg\alpha_0 - tg\alpha_m)}$$

Из услова да је моменат у зглобу g једнак нули добијамо $\boxed{H = \frac{M_{g0}}{f}}$ Носач се понаша као лук на три зглоба

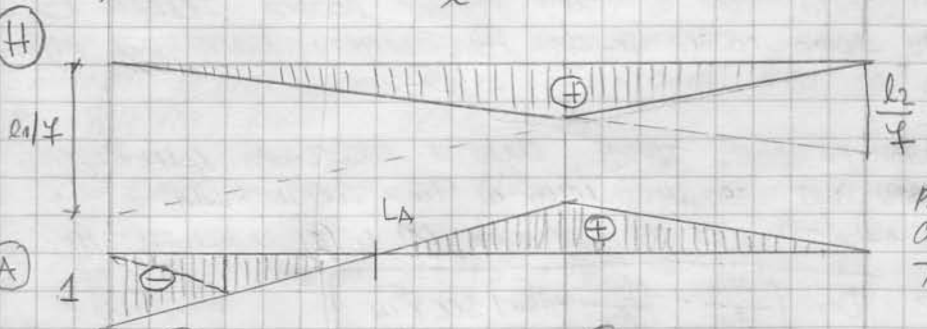
Изрази за силе у пресецима: $\boxed{M_C = M_{C0} - Hy_C}$, M_{C0} - моменат кореспондентне просте греде

исто као код лука на 3 зглоба ⇐ $\boxed{T_C = T_{C0} - H(tg\alpha_M - tg\alpha_0)}$ ⇒ T_C сличан израз као A, само што се додаје T_{C0}

11. Конструкција утицајних линија код висећег моста.

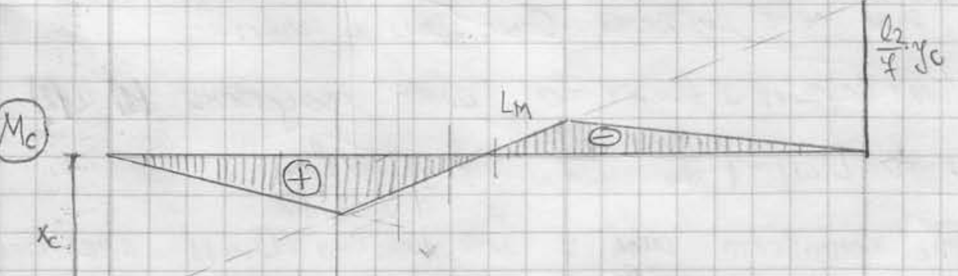


Конструкција врло сл. као код лука на 3 зглоба. ППТ да су греде између вешаљки оптерећене посредно.

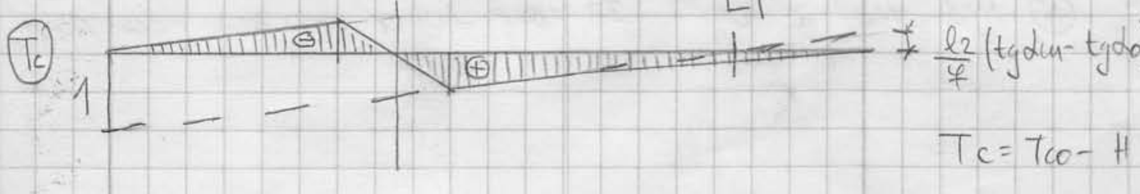


Утиц. линија за реакцију A се разликује од утиц. линије за транс. силу у пољу до ослонца a само у том пољу.

(B) се црта исто као и (A) само с друге стране.

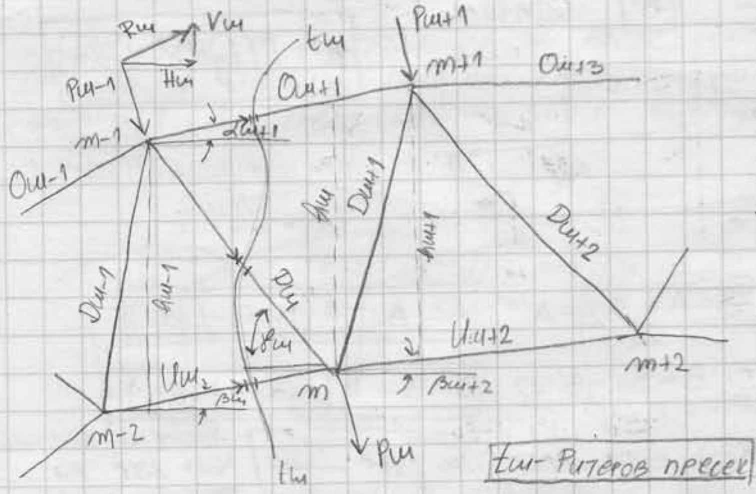


$M_C = M_{C0} - Hy_C$



$T_C = T_{C0} - H(tg\alpha_m - tg\alpha_0)$

12. Аналитички изрази за силе у штаповима решетке са троугаоном испуном и решетке са вертикалама и дијагоналама.



t_m - Ритеров пресек

На сл. је део решетке са троугаоном испуном без вертикала.
- Чворови су обележени бројевима оним редом како на њих наилазимо пратећи потез дијагоналних штапова.

O - горњи појас, U - доњи појас, D - дијагонале, индекс штапа је десни чвор. h_m - висина решетке у чвору m

α - нагиб O штапова према хоризонтали
β - нагиб U ——||——
γ - ——||—— D ——||——

- Решетка је у чворовима оптерећена силама P_m. Резултанта сила лево од t_m који сече D_m обележена је са R_m а њене хоризонтална и вертикална компонента са H_m и V_m.
H_m је ⊕ кад делује ка пресеку, а V_m је ⊕ за део лево од пресека кад делује навише, а за део десно од пресека кад делује наниже.
- Моменте сила лево или десно од пресека, односно моменте силе R_m у односу на чворове $m-1$ и m бележићемо са M_{m-1} и M_m, за силе лево од пресека ⊕M је ↻, а десно од пресека ⊕M је ↺.

- Анал. изразе за силе у појасним штаповима (горњи и доњи) добијамо Ритеровом методом. Ритерова тачка за силу O_{m+1} је чвор m, а за силу U_m је чвор $m-1$. Услови да су моменти свих сила лево или десно од t_m у односу на чворове $m-1$ и m једнаки 0

$$M_{m-1} - U_m h_{m-1}\cos\beta_m = 0 \Rightarrow U_m\cos\beta_m = +\frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} \Rightarrow \boxed{U_m = +\frac{M_{m-1}}{h_{m-1}}\sec\beta_m} \quad (1)$$

$$M_m + O_{m+1}h_m\cos\alpha_{m+1} = 0 \Rightarrow O_{m+1}\cos\alpha_{m+1} = -\frac{M_m}{h_m} \Rightarrow \boxed{O_{m+1} = -\frac{M_m}{h_m}\sec\alpha_{m+1}} \quad (2)$$

- Види се да је хоризонтална компонента силе у штапу горњег појаса једнака ⊖, да је хор. компонента силе у штапу доњег појаса једнака ⊕ вредности количника M/h за одговарајућу Ритерову тачку.

- Пошто је за дијагоналу тешко наћи Ритерову тачку, силу у дијагонали одређујемо из услова да је збир хориз. компоненти сила лево или десно од t_m једнак нули:

$D_m\cos\gamma_m + O_{m+1}\cos\alpha_{m+1} + U_m\cos\beta_m + H_m = 0$, у јн-у уносимо (1) и (2) и добијамо

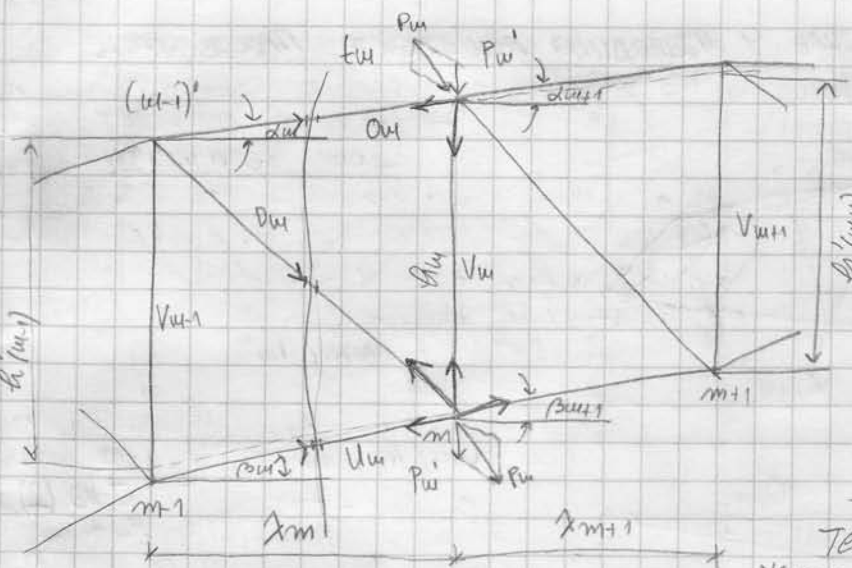
$$D_m\cos\gamma_m = \frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} - H_m \iff \boxed{D_m = \left(\frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} - H_m\right)\sec\gamma_m}$$

Горњи израз важи за дијагоналу D_m која пада с лева на десно.
- Силу у дијагонали D_{m+1} која пада с десна на лево добијамо из услова равнотеже сила лево или десно од t_{m+1} који сече штапове O_{m+1}, D_{m+1} и U_{m+2}.

$D_{m+1}\cos\gamma_{m+1} + O_{m+1}\cos\alpha_{m+1} + U_{m+2}\cos\beta_{m+2} + H_{m+1} = 0$, опет убацујемо (1) и (2)

$$D_{m+1}\cos\gamma_{m+1} = \frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m+1}}{h_{m+1}} - H_{m+1} \Rightarrow D_{m+1} = \left(\frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m+1}}{h_{m+1}} - H_{m+1}\right)\sec\gamma_{m+1}$$

- Из јн-а за D_m се види да хориз. компонента силе у D_m, односно D_{m+1} представља разлику количника M/h за чворове на крајевима те дијагонале умањеној за хор. компоненту спољ. сила. ⊕ M/h члан је онај за чвор доњег појаса решетке.



- Решетка са троугаоном испуном са вертикалама
- ознаке су аналогне са претходном скицом.
- појасне штапове и силе у њима одређујемо на исти начин као пре:

$$O_m = -\frac{M_m}{h_m}\sec\alpha_m, \quad U_m = \frac{M_{(m-1)}}{h_{m-1}}\sec\beta_m$$

$$D_m = \left(\frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{(m-1)}}{h_{m-1}} - H_m\right)\sec\gamma_m$$

- Ритерову тачку за вертикалу V_m је тешко одредити. Израз V_m налазимо из услова равнотеже сила које нападају чвор m (горњег или доњег појаса)

- силе у чвору m стоје у равнотежи па је збир момената тих сила с обзиром на било коју тачку у равни једнак нули. Написали смо услов за тачку $(m-1)'$ која лежи на нападној линији силе D_m:

$$\boxed{U_m h_{m-1}\cos\beta_m - U_{m+1} h'_{(m-1)}\cos\beta_{m+1} - V_m\lambda_m + P_m'\lambda_m = 0}$$

P_m' - вертикална компонента силе P_m (коју разлажемо на правац дијагонале и вертикале)

У уоквирену ј-ну уносимо $U_m\cos\beta_m = \frac{M_{(m-1)}}{h_{m-1}}$, $U_{m+1}\cos\beta_{m+1} = \frac{M_{(m)}}{h_{(m)}}$) решавамо по V_m и добијамо

$$V_m = P''_m + \frac{h_{m-1}}{\lambda_m}\left(\frac{M_{(m-1)}}{h_{m-1}} - \frac{M_m}{h_m}\cdot\frac{h'_{(m-1)}}{h_{m-1}}\right),$$

исто ово само у односу на чвор m+1 добијамо

$$-V_m = P'_{(m)} + \frac{h_{m+1}}{\lambda_{m+1}}\left(\frac{M_{m+1}}{h_{m+1}} - \frac{M_m}{h_m}\frac{h'_{m+1}}{h_{m+1}}\right)$$

- када решетка има праве, паралелне и хоризонталне појасеве изрази за силе у штап. су знатно једноставнији. $O_m = -\frac{M_m}{h}$, $U_m = \frac{M_{(m-1)}}{h}$

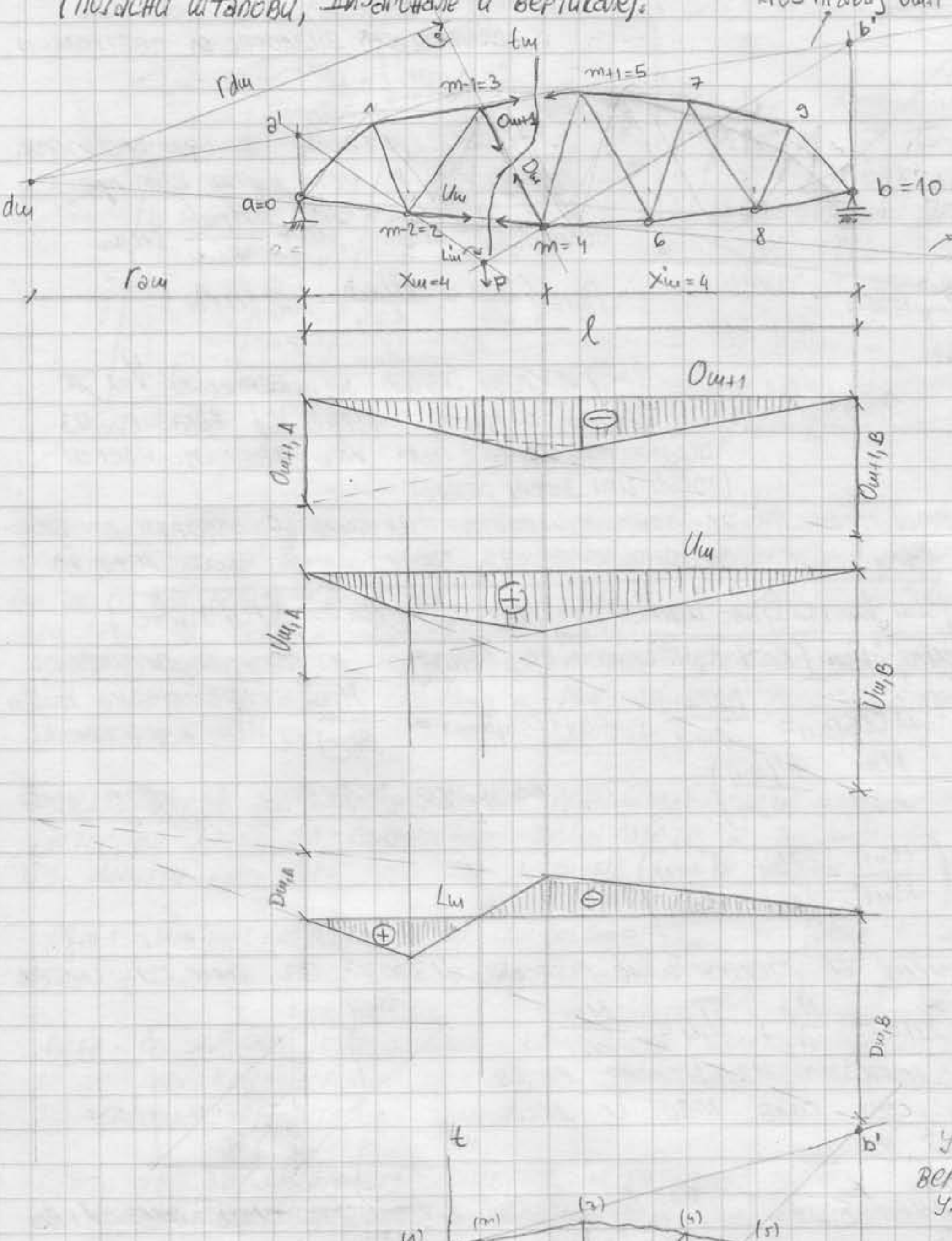
силе у штаповима испуне добијамо из услова да су збирови вертик. компоненти свих сила лево и десно од пресека t_m и t једнаки нули:

$$-D_m\sin\gamma_m + T_m = 0 \Rightarrow \boxed{D_m = \frac{T_m}{\sin\gamma_m}}$$

$$V_m + T_m - P_m = 0 \Rightarrow \boxed{V_m = P_m - T_m}$$

T_m - вертикална компонента спољ. сила лево или десно од пресека t_m.

13. Конструкција утицајних линија за силе у штаповима решеткасте просте греде (појасни штапови, дијагонале и вертикале).



- горњи појас притиснут
доњи затегнут!!!

$O_{m+1,A} = -\frac{x_m}{h_m}\sec\alpha_{m+1}$

$O_{m+1,B} = -\frac{x'_m}{h_m}\sec\alpha_{m+1}$

сл. као 12. питање ј-на (2) $M_m \sim x_m$

$U_{m,A} = \frac{x_{m-1}}{h_{m-1}}\sec\beta_m$

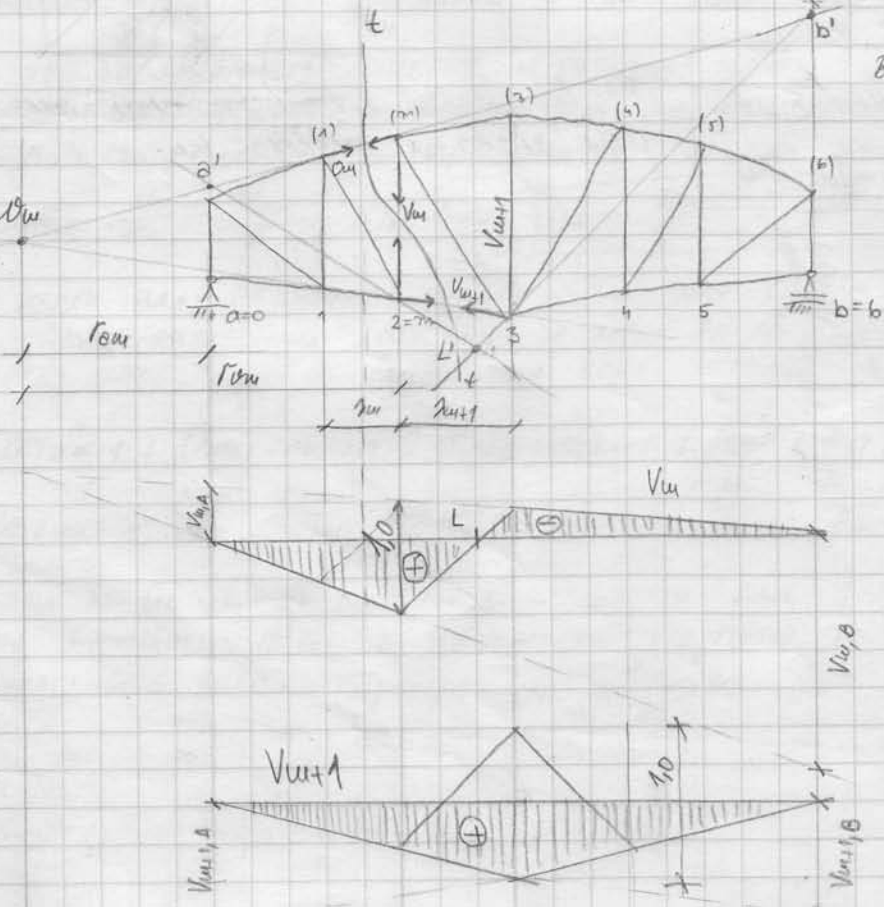
$U_{m,B} = \frac{x'_{m-1}}{h_{m-1}}\sec\beta_m$

сл. као 12. питање (1) само што уместо M_{m-1} иде x_{m-1}

$D_m = -\frac{M_{d_m}}{r_{d_m}} \Rightarrow$

$\Rightarrow D_{m,A} = \frac{r_{a_m}}{r_{d_m}}, \; D_{m,B} = -\frac{r_{b_m}}{r_{d_m}}$

M_{d_m} - моменат са једне стране Ритеровог пресека у односу на тачку d_m.



Утицајну линију за силу у вертикали конструишемо слично као у.л. за дијагоналу.

$V_m = \frac{M_{o_m}}{r_{o_m}}$, M_{o_m} - моменат сила с једне стране пресека $t-t$ у односу на тачку O_m

$V_{m,A} = -\frac{r_{a_m}}{r_{v_m}}; \; V_{m,B} = \frac{r_{b_m}}{r_{o_m}}$

Погоднији израз за V_m добијамо полазећи од познатог израза из 12. питања

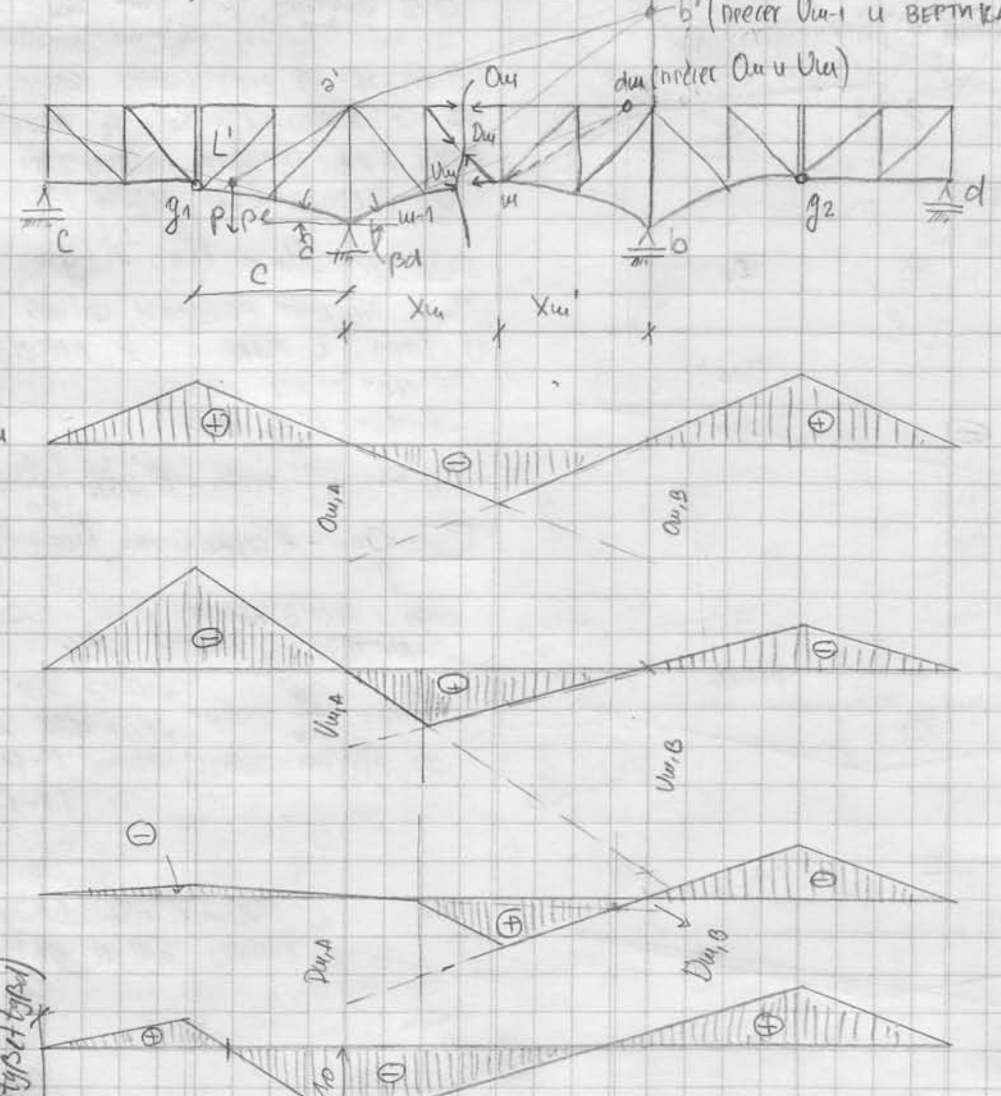
$$V_m = -\frac{h_{m+1}}{\lambda_{m+1}}\left(\frac{M_{m+1}}{h_{m+1}} - \frac{M_m}{h_m}\cdot\frac{h'_{m+1}}{h_{m+1}}\right)$$

$\Rightarrow$

$$V_{m,A} = -\frac{h_{m+1}}{\lambda_{m+1}}\left(\frac{x_{m+1}}{h_{m+1}} - \frac{x_m}{h_m}\frac{h'_{m+1}}{h_{m+1}}\right)$$

$$V_{m,B} = -\frac{h_{m+1}}{\lambda_{m+1}}\left(\frac{x'_{m+1}}{h_{m+1}} - \frac{x'_m}{h_m}\frac{h'_{m+1}}{h_{m+1}}\right)$$

14. Конструкција у.л. за силе у штаповима решеткастог Гербера (појасни штапови, дијагонале, ослоначка вертикала и штапови на препусту)



Носач се састоји од греде са препустима $g_1 g_2$ и 2 просте греде cg_1 и dg_2

На делу носача ab (проста греда) у.л. ће бити исте као за просту греду!!!

$$O_{m,A} = -\frac{x_m}{a_m}\left(-\frac{M_m}{a_m}\right)$$

Од пресека па лево преко a до g_1 је све једна кинем. крута плоча и зато је у.л. права

$$U_{m,A} = \frac{x_{m-1}}{a_{m-1}} \sec\beta_m \quad x_{m-1} \sim M_{m-1}$$

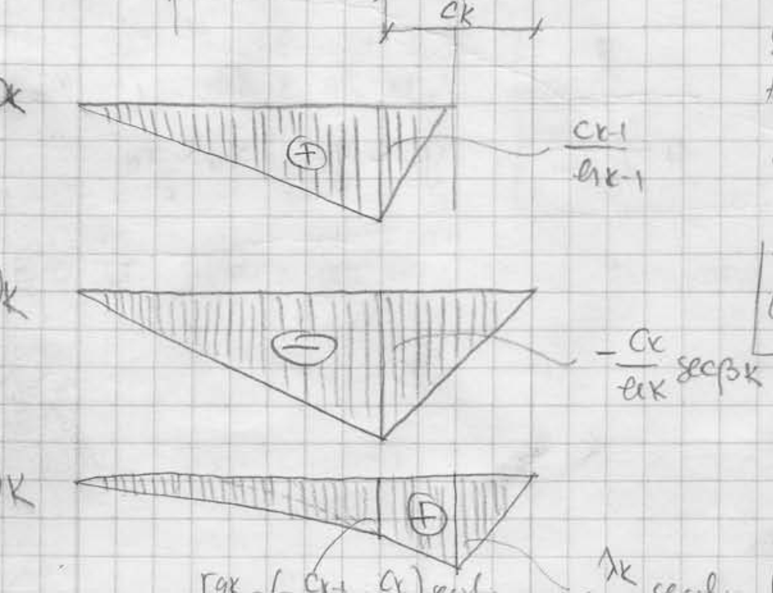
$$D_{m,A} = \frac{r_{am}}{r_{dm}}\left(\frac{M_{dm}}{r_{dm}}\right)$$

Силу у ослоначкој вертик. одређујемо из услова да је збир верт. компоненти свих сила у чвору a нула:

$$V_a = -A - \frac{M_{(a)}}{h_a}\left(tg\beta_e + tg\beta_d\right)$$

P делује у g_1 имамо

$$\boxed{V_a = -1 - \frac{c}{h_a}\left(tg\beta_e + tg\beta_d\right)}$$



На деловима cg_1 и cg_2 у.л. морају бити праве (кинематички круте плоче!)

У зглобовима g_1 и g_2 оне се секу са у.л. на препустима

$$O_k = -\frac{M_{k-1}}{h_{k-1}}, \quad U_k = \frac{M_{(k)}}{h_k}\sec\beta_k, \quad D_k = \frac{M_{dk}}{r_{dk}}$$

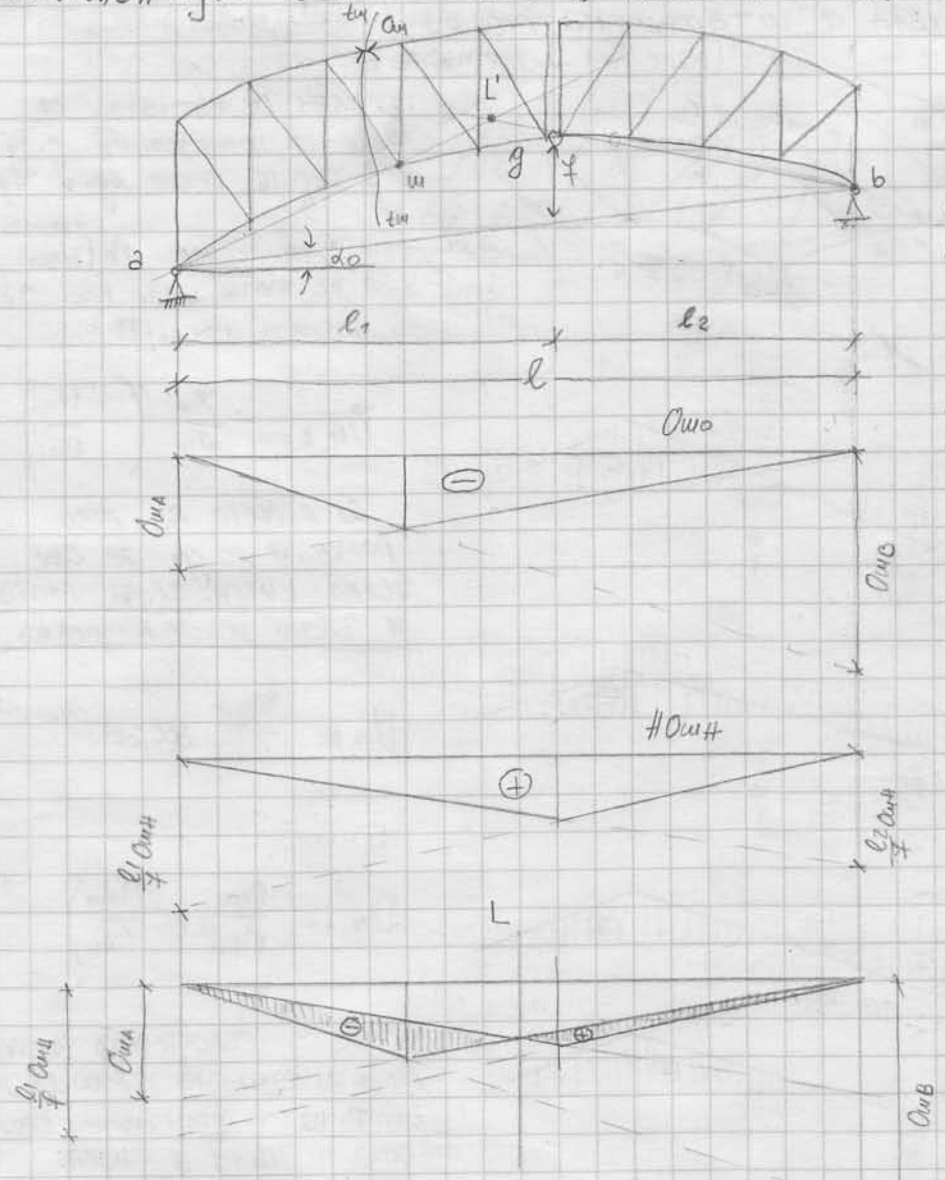
тј.

$$\boxed{O_k = \frac{c_{k-1}}{h_{k-1}} \quad U_k = -\frac{c_k}{h_k}\sec\beta_k \quad D_k = \frac{r_{gk}}{r_{dk}}}$$

$$\frac{r_{gk}}{r_{dk}} = \left(-\frac{c_{k-1}}{h_{k-1}} + \frac{c_k}{h_k}\right)\sec\gamma_k$$

(у чвору k-1 $M_{k-1}=0$, $M_k = -\lambda_k$)

16. Конструкција у.л. за силу у појасном штапу решеткастог лука на 3 зглоба



сила у штапу $O_ш$: $O_ш = -\frac{M_ш}{r_ш}\sec\alpha_ш$

У питању је вертикално оптерећење па су компоненте V_a' и V_b' реакција лука A и B једнаке реакцијама просте греде распона l оптерећене датим опт

Онда је $M_ш = M_{ш0} - H y_ш$

$M_{ш0}$ - момент реакције V_a' или V_b' и сила с једне стране пресека (момент просте греде)

$-H\cdot y_ш = -H' y_ш \cos\alpha_0$

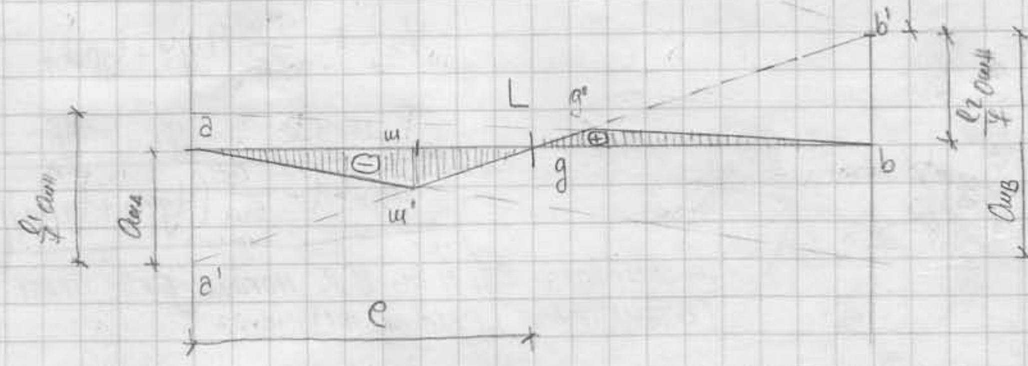
$O_ш = -\frac{M_{ш0}}{r_ш}\sec\alpha_ш + H'\cos\alpha_0\left(\frac{y_ш}{r_ш}\sec\alpha_ш\right)$

$\boxed{O_ш} = O_{ш0} + H'\cos\alpha_0\, O_{шH} = \overline{O_{ш0} + HO_{шH}}$

сила у посматраном штапу као ш- решеткасте просте греде

$O_{шH} = \frac{y_ш}{r_ш}\sec\alpha_ш$ → сила као се лево или десно од пресека јавља само $H' = \sec\alpha_0$ $(H=1)$

L - нулта тачка дијаграма (у пресеку aш и gb)



$\overline{aa'} = O_{шA}$ $\overline{bb'} = \frac{l_2}{f}O_{шH}$

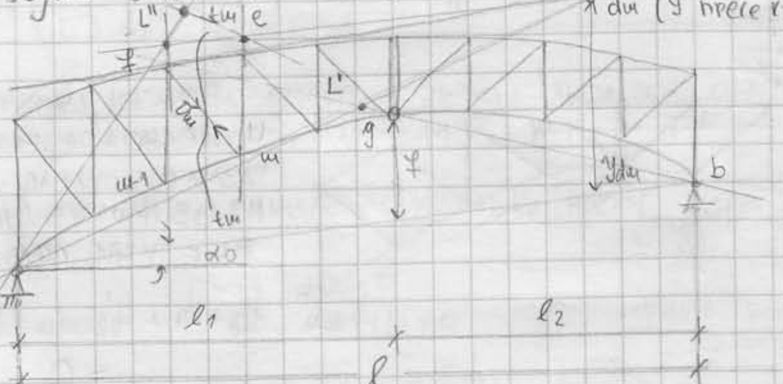
e - одстојање нулте тачке

$$\boxed{e = \frac{l}{1+\frac{l_2}{f}\frac{y_ш}{x_ш}}}$$

Сл. као за H код лука на 3 зглоба (4. питање

$y_ш \sim y_c$ $x_ш \sim x_c$

16. Конструкција у.л. за силу у дијагоналном штапу решеткастог лука на 3 зглоба.



$d_ш$ (у пресеку праваца $O_ш$ и $U_ш$)

сила у дијагонали $D_ш$:

$$D_ш = \frac{M_{dш}}{r_{dш}} = \left(\frac{M_ш}{a_ш} - \frac{M_{(ш-1)}}{a_{ш-1}} - H_ш\right)\sec\vartheta_ш$$

(12. питање)

момент с једне стране пресека $t_ш - t_ш$ у односу на $d_ш$:

$$M_{dш} = M_{dш0} - H' y_{dш}\cos\alpha_0 = M_{dш0} - H y_{dш}$$

$$D_ш = \frac{M_{dш}}{r_{dш}} = \frac{M_{dш0}}{r_{dш}} - H'\cos\alpha_0 \frac{y_{dш}}{r_{dш}}$$

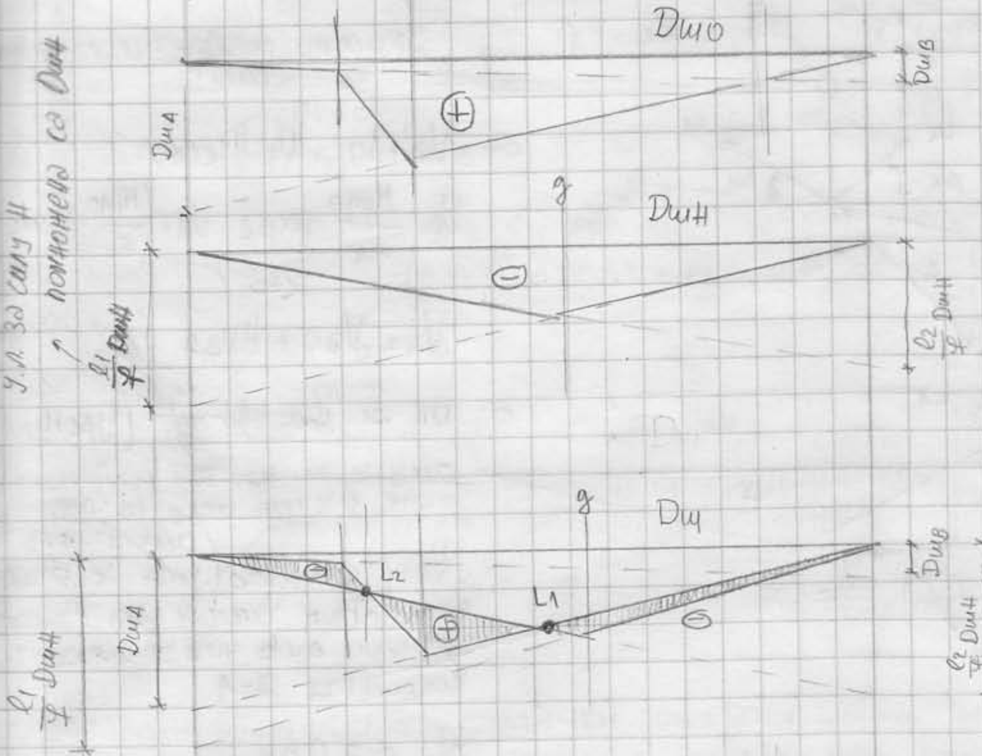
$$D_ш = D_{ш0} + H'\cos\alpha_0 D_{шH} = D_{ш0} + H D_{шH}$$

сила у посматраном ш. као ш. решеткасте просте греде

$$D_{шH} = -\frac{y_{dш}}{r_{dш}}$$

(сила у $D_ш$ услед равнотежн. оптерећења силама $H' = \sec\alpha_0$ чија је хориз. пројекција $H = 1$)

$$D_{шH} = \left(\frac{-y_ш}{a_ш} + \frac{y_{(ш-1)}}{a_{ш-1}} - 1\right)\sec\vartheta_ш$$



У.л. за $D_ш$ добијамо суперпозицијом $D_{шH}$ и $D_{ш0}$

од ш-1 до ш у.л. мора бити права линија!

у.л за силу у $D_ш$ 2x мења знак!!

у L_1 (између чвора ш и g)

у L_2 (у пресечном пољу)

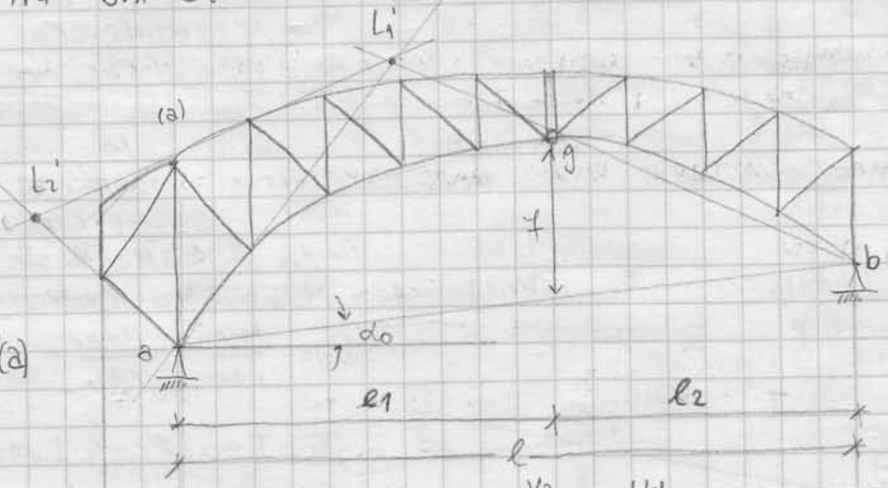
L' ($ad_ш \cap bg$)

$bg \cap$ вертикала кроз m добијамо e, одатле $d_ш e \cap$ вертикала кроз ш-1 добијамо f

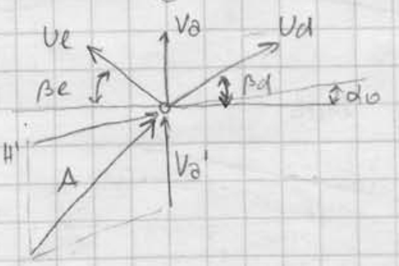
$af \cap bg = L''$

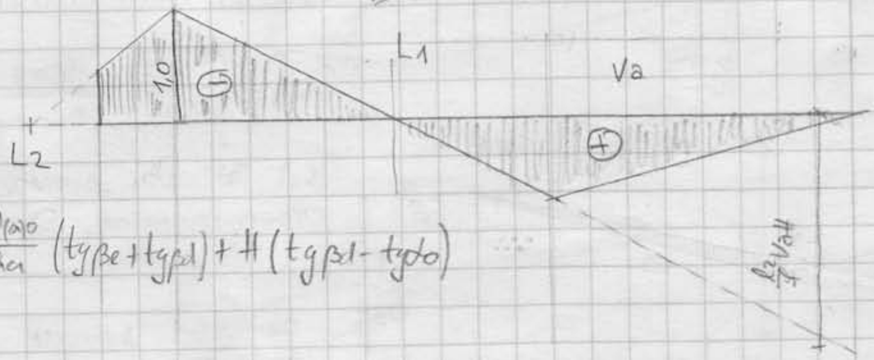
$a'b'$ и $a D_{шB}$ се секу испод Ритерове тачке!

17. Конструкција у.л. за силу у ослоначкој вертикали решетастог лука на три зглоба.



$L_2' = a \cap L_1(a)$





$V_a = -A_0 - \frac{M(a)_0}{h_a}(tg\beta_\ell + tg\beta_d) + H(tg\beta_d - tg\alpha_0)$

Пошто дијагонале лев[о] и десно од вертикале и[мају] различит правац, силу V_a налазимо из услова рав[нотеже] вертикал. сила у чвору а

$V_a + V_a' + H'\sin\alpha_0 + U_\ell \sin\beta_\ell + U_d \sin\ldots = 0$

Уносимо познате изразе за силе:

$V_a' = A_0 \quad H' = H\sec\alpha_0$

$U_\ell = \frac{M(a)_0}{h_a}\sec\beta_\ell \quad U_d = \left(\frac{M(a)_0}{h_a} - H\right)\sec\ldots$

$\Longleftrightarrow$

$V_a = V_{a0} + H V_{aH}$

где је $V_{a0} = -A_0 - \frac{M(a)_0}{h_a}(tg\beta_\ell + tg\ldots$

силу у ш. као ш. решетка... плоче система греде са препу...

$V_{aH} = tg\beta_d - tg\alpha_0$ (сила у ш. која је от... равнотежним системом сила H' ... у тачкама a и b чија је хоризон[тална] компонента $H=1$

$L_1' = a \cap bg$

18. Дијаграми померања лучних носача, гранични услови у фиктивним носачима, фиктивни носачи статички одређених и статички неодређених носача.

- Померања тачака одређују се аналитички само у једноставним случајевима, углавном з[а] прав штап константног попречног пресека који је оптерећен једноставним облицима оптерећ[ења]. У осталим случајевима померања одређујемо графички или нумерички.

- Користимо аналогију која постоји између диференцијалних ј-на за померања тачака осе с једне стране и услова равнотеже елемента једног правог фиктивног штапа са друге стране [MOHROVA АНАЛОГИЈА] → може да се прошири и на ш. са произвољним обликом осе.

Присећамо се познатих ј-на са првог колоквијума: $\frac{d(\varphi-\varphi_T)}{dx} = -\frac{\varkappa}{\cos\alpha}$ и $\frac{dv}{dx} = (\varphi-\varphi_T) + \varepsilon tg\alpha$

Сила $p^f dx$ и момент $m^f dx$ који нападају елеменат фиктивног ш. дужине dx стоје са силама у пресецима тог ш. у равнотежи и ти услови гласе: $\frac{dT^f}{dx} = -p^f$, $\frac{dM^f}{dx} = T$

Кад горња 2 система ј-на упоредимо, видимо да један систем прелази у други кад ставимо: $\frac{\varkappa}{\cos\alpha} \leftrightarrow p^f$, $\varepsilon tg\alpha + \varphi_T \leftrightarrow m^f$, $\varphi - \varphi_T \leftrightarrow T^f$, $v \leftrightarrow M^f$

Из тога следи: да су померања v датог ш. услед датих спољ. утицаја једнака моментима M^f а да су углови обртања поп. пресека $\varphi-\varphi_T$ једнаки трансвер[залним] силама T^f фиктивног ш. који је оптерећен фиктивним расподељеним оптерећењем и фикт. расподељеним моментима.

$p^f = \frac{\varkappa}{\cos\alpha} = \left(\frac{M}{EJ} + \alpha_t \frac{\Delta t^\circ}{h}\right)\frac{1}{\cos\alpha}$; $m^f = \varepsilon \operatorname{tg}\alpha + \varphi_T = \left(\frac{N}{EF} + \alpha_t t^\circ\right)\operatorname{tg}\alpha + k\frac{T}{GF}$

- Када тражимо дијаграм померања v или дијаграм обртања $\varphi-\varphi_T$ користимо статичко кинематичку аналогију. $v \sim M^f$, $\varphi-\varphi_T \sim T^f$

- Да би све ово горе важило фиктивни носач мора задовољити одговарајуће граничне услове:

1) стварни носач: $v_i=0$, $(\varphi-\varphi_T)_i \neq 0$ $\Leftrightarrow$ фикт. носач: $M_i^f=0$, $T_i^f \neq 0$

2. $v_i=0$, $(\varphi-\varphi_T)_i=0$ $\Leftrightarrow$ $M_i^f=0$, $T_i^f=0$

3. $v_i\neq 0$, $(\varphi-\varphi_T)_i\neq 0$ $\Leftrightarrow$ $M_i^f\neq 0$, $T_i^f\neq 0$

4. $v_i\neq 0$, $(\varphi-\varphi_T)_L=(\varphi-\varphi_T)_D\neq 0$ $\Leftrightarrow$ $M_i^f\neq 0$, $T_{iL}^f=T_{iD}^f\neq 0$

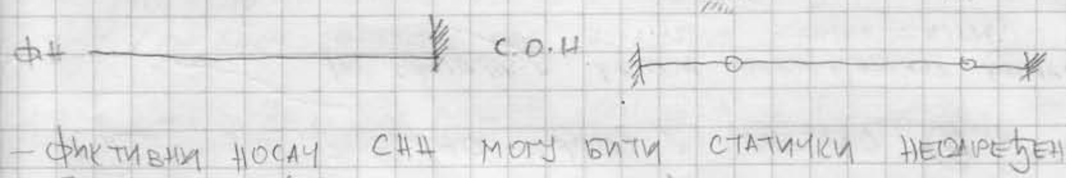
5. $v_{iL}=v_{iD}\neq 0$, $(\varphi-\varphi_T)_{i,L}\neq(\varphi-\varphi_T)_{i,D}\neq 0$ $\Leftrightarrow$ $M_{iL}^f=M_{iD}^f\neq 0$, $T_{iL}^f\neq T_{iD}^f\neq 0$

Увек посматрамо 2 бесконачно блиска пресека

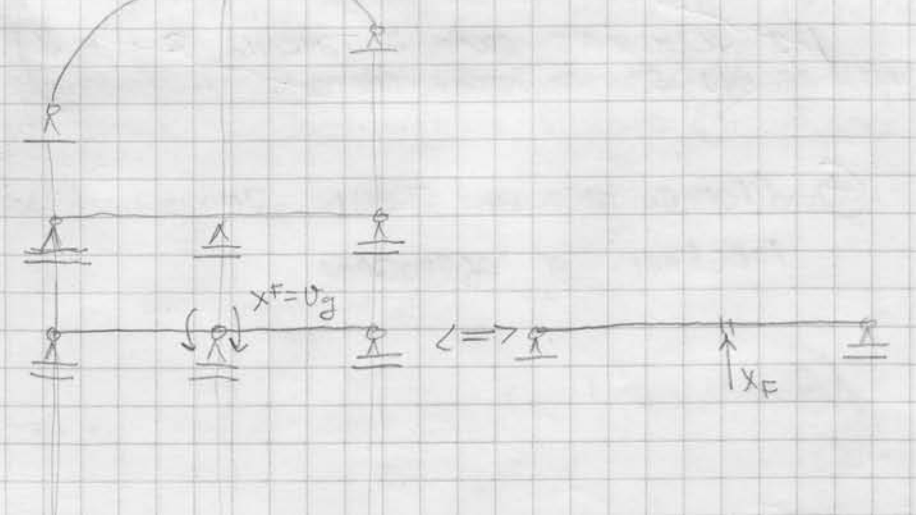
6. $v_i^L=v_i^D=0$, $(\varphi-\varphi_T)_L=(\varphi-\varphi_T)_D\neq 0$ $\Leftrightarrow$ $M_{iL}^f=M_{iD}^f=0$, $T_L^f=T_D^f\neq 0$

7. $v_i^L=v_i^D=0$, $(\varphi-\varphi_T)_L\neq(\varphi-\varphi_T)_D\neq 0$ $\Leftrightarrow$ $M_{iL}^f=M_{iD}^f=0$, $T_{iL}^f\neq T_{iD}^f\neq 0$

- Фиктивни носач једног статички одређеног носача или једног потеза статички одређених носача је или статички одређен или статички неодређен.
- Пошто је наше оптерећење увек вертикално <u>немамо N силу у фиктивном носачу!</u>



- Фиктивни носачи СНН могу бити статички неодређени, одређени али и преодређени (кинематички лабилни).



19. Примена принципа виртуалних сила за прорачун деформације носача.

$$\boxed{\sum \bar{P}_1 + \sum \bar{C}_c = \int_s (\bar{M}\varkappa + \bar{N}\varepsilon + \bar{T}\gamma_T)\,ds}$$

Принцип виртуалних сила (градиво за I колоквијум)

Да бисмо применом принципа виртуалних сила одредили компоненту померања у одређ. правцу једне тачке неког носача, у тачки чије померање тражимо у правцу траженог померања задајемо јединичну силу $\bar{P}=1$. (Генерализација: није неопходно да ставимо јединичну силу, него неку генералисану силу. Под генер. силом подразумевамо читав низ различитих оптерећења у зависности шта желимо да одредимо)

$$\bar{P}=1 \Rightarrow \boxed{\delta = \int_s (\bar{M}\varkappa + \bar{N}\varepsilon + \bar{T}\gamma_T)\,ds - \sum \bar{C}_i c_i}$$ (јер је $\sum \bar{P}_1 = 1$)

$\bar{M}, \bar{N}, \bar{T}, \bar{C}$ - дијаграми сила у пресецима тј. реакције ослонаца од јединичне силе.

За један еластичан, раван линијски носач који следи Хуков закон важи следеће:

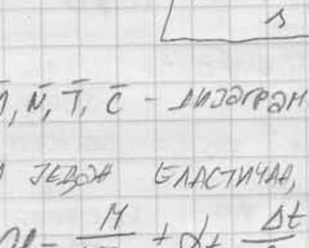
$\varkappa = \frac{M}{EJ} + \alpha_t \frac{\Delta t}{h}$; $\varepsilon = \frac{N}{EF} + \alpha_t \cdot t$; $\gamma_T = k\frac{T}{GF}$; M, N, T - стварни дијаграми у носачу услед задатог оптерећења

$$\boxed{\delta = \underbrace{\int_s \frac{M\bar{M}}{EJ}ds + \int_s \frac{N\bar{N}}{EF}ds + \int_s k\frac{T\bar{T}}{GF}ds}_{\delta_0\ (\text{померања услед оптерећења})} + \underbrace{\int_s \bar{M}\alpha_t \frac{\Delta t}{h}ds + \int_s \bar{N}\alpha_t t^\circ ds}_{\delta_t\ (\text{померања услед температурне промене})} - \underbrace{\sum \bar{C}_i c_i}_{\delta_c}}$$

δ_c (померања услед -||- ослонаца и обртања укљештења)

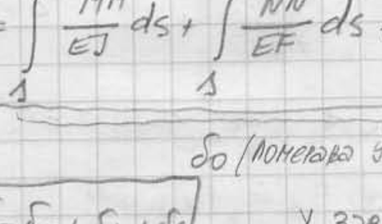
$\boxed{\delta = \delta_0 + \delta_t + \delta_c}$, у зависности од траженог померања задајемо различите генер. силе

1) померање тачке m (задајемо конц. силу у тачки m у правцу у коме тражимо померање)



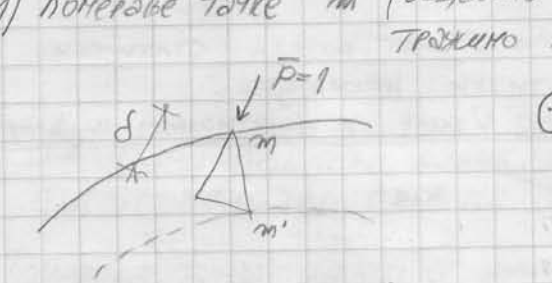
⊕ померање тачке m у смеру силе P

2. обртање пресека m (јединични концентрисани момент у пресеку m)



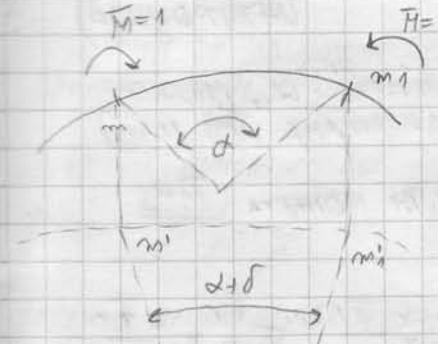
⊕ обртање у смеру обртања казаљке на сату

3. промена одстојања тачака a и b (2 јединичне силе у тачкама a и b у правцу ab супротног смера)



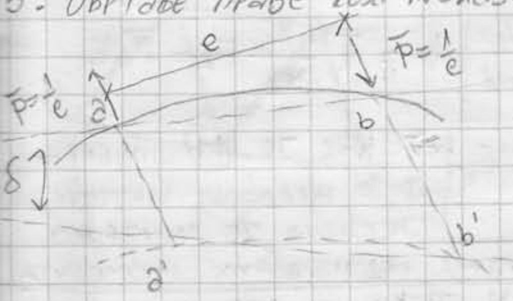
⊕ промена одстојања тачака је повећање тог одстојања

4. Промена угла α између пресека m и m_1 (2 јединична концентрисана момента у пресецима m и m_1, супротног смера)



⊕ промена угла је смањење тог ∡

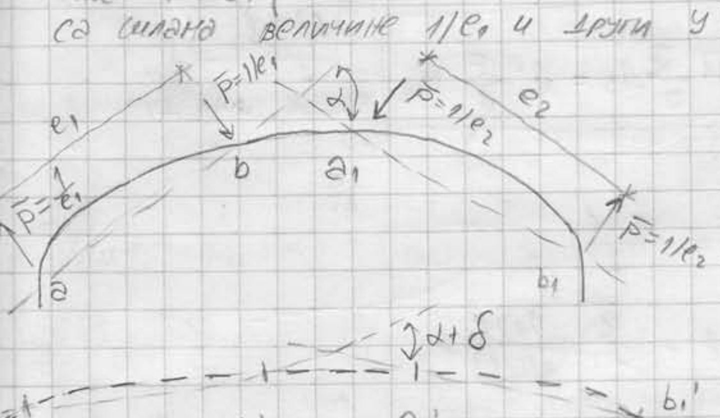
5. Обртање праве која пролази кроз тачке a и b (2 силе у тачкама a и b управне на праву ab, величине $1/e$, супротног смера, тј. спрег сила момената $\bar{M}=1$)



⊕ обртање у смеру казаљке на сату

6. Промена ∡α између праве која пролази кроз тачке a и b и праве која пролази кроз тачке a_1 и b_1 (2 пара сила са супротним смером обртања, један у тачкама a и b са силама величине $1/e_1$ и други у тачкама a_1 и b_1 са силама величине $1/e_2$)

⊕ промена ∡ је смањење тог угла



- При прорачуну померања (пошто су јако мала) множимо упоредном крутошћу EJ_c (да бисмо избегли рад са малим величинама)

J_c – упоредни момент инерције највећег, најмањег или неког средњег попречног пресека

$$EJ_c\delta_0 = \int_s M\bar{M}\frac{J_c}{J}ds + \frac{J_c}{F_c}\int_s N\bar{N}\frac{F_c}{F}ds + 2(1+\nu)\frac{J_c}{F_c}\int_s kT\bar{T}\frac{F_c}{F}ds$$

$$EJ_c\delta_t = EJ_c\int_s \bar{M}\alpha_t\frac{\Delta t^\circ}{h}ds + EJ_c\int_s \bar{N}\alpha_t t^\circ ds$$

F_c – упоредна површина носача, тј. површина највећег, најмањег или средњег поп. прес.

$$EJ_c\delta_c = -EJ_c\sum \bar{C}_i c_i$$

$2(1+\nu) = \frac{E}{G}$! (отпорност материјала)

- Обично се утицај трансверзалних сила на деформацију занемарује!
- Код греда је доминантан утицај (M), а код простих штапова (N).

Код решеткастих носача постоји само утицај N!

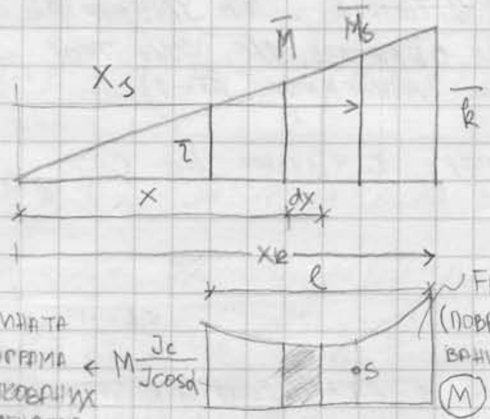
20. Нумерички поступци за прорачун померања („множење дијаграма", нумеричка интеграција)

- ПОТРЕБНО ЈЕ ИЗРАЧУНАТИ СЛЕДЕЋИ ИНТЕГРАЛ: $\boxed{\int M\bar{M}\frac{J_c}{J}ds}$

$\Rightarrow \int_1 M\bar{M}\frac{J_c}{J}ds = \sum_1 \int_i^k M\bar{M}\frac{J_c}{J}ds = \sum_1 \int_i^k M\bar{M}\frac{J_c}{J\cos\alpha}dx$, КАО ПРОБЛЕМ НАМЕЋЕ СЕ МНОЖЕЊЕ ДИЈАГРАМА (M) и ($\bar{M}$)

(M) - ДИЈАГРАМ УСЛЕД ПРОИЗВОЉНОГ ОПТ, ($\bar{M}$) - ДИЈАГРАМ УСЛЕД ЈЕДИНИЧНЕ СИЛЕ $\underline{\bar{P}=1}$ ИЛИ МОМЕНТА $\underline{\bar{M}=1}$

- ЈЕДАН ОД ДИЈАГРАМА ЈЕ ЛИНЕАРАН (УГЛАВНОМ $\bar{M}$)



$\bar{M}$ - НАЛАЗИМО ИЗ ПРОПОРЦИЈЕ $\bar{M} = X\frac{\bar{k}}{X_k}$, $\bar{M}_S = X_S\frac{\bar{k}}{X_k}$

$$\int_i^k M\bar{M}\frac{J_c}{J\cos\alpha}dx = \frac{\bar{k}}{X_k}\int_i^k X\left(M\frac{J_c}{J\cos\alpha}\right)dx = \bar{k}\frac{X_S}{X_k}F_R = \bar{M}_S F_R$$

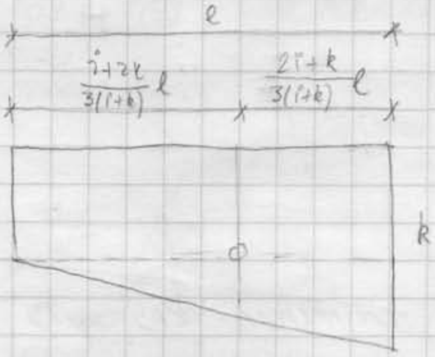
$$\boxed{\int_i^k M\bar{M}\frac{J_c}{J\cos\alpha}dx = \bar{M}_S F_R}$$

$\Rightarrow$ КАД ЈЕ ($\bar{M}$) ЛИНЕАРНА Ф-ЈА, ВРЕДНОСТ ИНТЕГРАЛА ЈЕДНАКА ЈЕ ПРОИЗВОДУ ПОВРШИНЕ ДИЈАГРАМА РЕДУКОВАНИХ МОМЕНАТА И ОРДИНАТЕ ($\bar{M}$) У ТЕЖИШТУ ПОВРШИНЕ ДИЈАГРАМА РЕДУКОВАНИХ МОМЕНАТА.

$$\int_i^k M\bar{M}\frac{J_c}{J}ds = \bar{M}_S\cdot \overbrace{F_R}^{} = \frac{J_c}{J}F\bar{M}_S = \frac{J_c}{J}\ell\cdot\frac{F}{\ell}\cdot\bar{M}_S \Rightarrow \boxed{\int_i^k M\bar{M}\frac{J_c}{J}ds = \ell'\frac{F}{\ell}\bar{M}_S}$$

$\boxed{\ell' = \ell\cdot\frac{J_c}{J}}$ РЕДУКОВАНА ДУЖИНА

МНОЖЕЊЕ 2 ЛИНЕАРНА ДИЈАГРАМА (ОПШТИ СЛУЧАЈ)



$F = \frac{i+k}{2}\ell$, $\frac{F}{\ell} = \frac{i+k}{2}$

$$\bar{M}_S = \frac{\bar{i}}{\ell}\frac{2i+k}{3(i+k)}\ell + \frac{\bar{k}}{\ell}\cdot\frac{i+2k}{3(i+k)}\ell$$

$$\bar{M}_S = \frac{1}{3(i+k)}\left[\bar{i}(2i+k) + \bar{k}(i+2k)\right],\quad \text{убацујемо } \frac{F}{\ell} = \frac{i+k}{2}$$

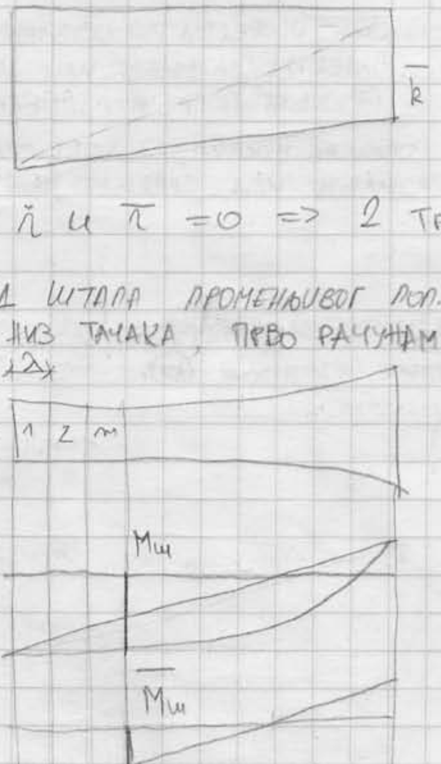
$$\boxed{\int_i^k M\bar{M}\frac{J_c}{J}ds = \frac{\ell'}{6}\left[\bar{i}(2i+k) + \bar{k}(i+2k)\right]}$$

за $\bar{k}=0$: ТРАПЕЗ × ТРОУГАО $\frac{\ell'}{6}\bar{i}(2i+k)$

$\bar{i}=\bar{k}$ ▭ × ТРАПЕЗ $\frac{\ell'}{2}\bar{i}(i+k)$

i и $\bar{i}=0 \Rightarrow$ 2 ТРОУГЛА $\frac{\ell'}{3}k\bar{k}$, $i=\bar{k}=0 \Rightarrow$ ◺ × ◸ $\frac{\ell'}{6}\bar{i}\cdot k$

- КОД ШТАПА ПРОМЕНЉИВОГ ПОП. ПРЕСЕКА ПРИМЕЊУЈЕМО НУМЕРИЧКУ ИНТЕГРАЦИЈУ, ШТАП ДЕЛИМО У НИЗ ТАЧАКА, ПРВО РАЧУНАМО J_c/J_m, $y_m = M_m\cdot\bar{M}_m\, J_c/J_m$ - РАЧУНАМО У СВАКОЈ ТАЧКИ



ТРАПЕЗНО ПРАВИЛО

1. $\int_i^k M\bar{M}\frac{J_c}{J}ds = \lambda\left(\frac{y_1}{2} + y_2 + y_3 + \dots + \frac{y_n}{2}\right)$

   1/2 1 1 ... 1/2

СИМПСОНОВО ПРАВИЛО ($n = 2k$)

2. $\int_i^k M\bar{M}\frac{J_c}{J}ds = \frac{\lambda}{3}\left(y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 4y_4 + \dots + 2y_{n-2} + \right.$

   1 4 2 4 2

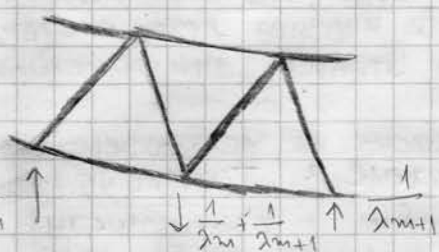
21. Одређивање дијаграма померања решеткастих носача применом еластичних тежина.

- Суштина је да оптерећење задато силама p^f и моментима m^f замењујемо концентрисаним силама у одређеном низу тачака (те силе обележавамо са W и зовемо их еластичним тежинама)

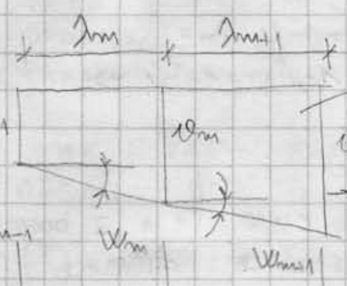
Израз за померање код решеткастих носача има нешто једноставнији облик:

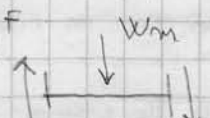
$$N=const \Rightarrow \int_s \to \sum_s \Rightarrow \boxed{\delta = \sum_s \frac{S\bar S}{EF}\, l + \sum_s \bar S \alpha_t t^\circ l - \sum_i \bar C_i c_i} = \delta_o + \delta_t + \delta_c$$

Уводимо упоредну аксијалну крутост EF_c $\Rightarrow$ $\boxed{EF_c \cdot \delta_o = \sum_s S\bar S \frac{F_c}{F}\, l}$



- По Мор-Максвеловој аналогији овај дијаграм је једнак дијаграму момената фиктивног носача





$$T_m^f = \frac{v_m - v_{m-1}}{\lambda_m} \qquad T_{m+1}^f = \frac{v_{m+1} - v_m}{\lambda_{m+1}}$$

$$W_m = T_m^f - T_{m+1}^f = \frac{v_m - v_{m-1}}{\lambda_m} - \frac{v_{m+1} - v_m}{\lambda_{m+1}}$$

$$W_m = -\frac{1}{\lambda_m} v_{m-1} + \left(\frac{1}{\lambda_m} + \frac{1}{\lambda_{m+1}}\right) v_m - \frac{1}{\lambda_{m+1}} v_{m+1}$$, замислимо да је $\frac{1}{\lambda}$ генералисана сила (рад генералисане силе над стварним померањима)

$$\sum \bar P s + \sum \bar C c = \int_s \left(\cancel{\bar M \kappa^\circ} + \bar N \varepsilon + \cancel{\bar T \varphi_T^\circ}\right) ds$$ решеткаст носач; принцип виртуалних сила, $\varepsilon = \frac{N}{EF} + \alpha_t \cdot t$

$$\boxed{W_m = \sum_s \frac{S\bar S}{EF}\, l + \sum \bar S \alpha_t t^\circ l}$$ еластична тежина!!

22. Теореме о узајамности

I Теорема о узајамности радова

- Посматрамо 2 стања у једном СОН или СНН. Једно стање које у њему изазива оптерећење силама P_m, $m=1\dots k$ и померања ослонаца и укљештења c_i и друго стање које у њему изазива оптерећење силама $\bar P_m$, $m=1,2,\dots,l$ и померања ослонаца и укљештења $\bar c_i$.

Прво стање: реакције ослонаца и укљештења (C_i); силе у пресецима (N,T,M); деформ. $\kappa = \frac{M}{EJ}$, $\varepsilon = \frac{N}{EF}$, $\varphi_T = k\frac{T}{GF}$ и померања тачака δ.

Друго стање: реакције $(\bar C_i)$, силе $(\bar N, \bar T, \bar M)$, деформ. $\bar\kappa = \frac{\bar M}{EJ}$, $\bar\varepsilon = \frac{\bar N}{EF}$, $\bar\varphi_T = k\frac{\bar T}{GF}$, померања тачака $\bar\delta$

Први систем P_m, C_i, N, T, M схватамо као једно могуће равнотежно стање носача

Други систем $\bar\kappa, \bar\varepsilon, \bar\varphi_T, \bar\delta, \bar c$ —||— једно могуће стање деформација носача

ГЛЕДАМО ПРИНЦИП ВИРТУАЛНИХ ПОМЕРАЊА И ПРИНЦИП ВИРТУАЛНИХ СИЛА

ПВП: $\sum P_m \bar\delta_m + \sum C_i \bar c_i = \int_s \left(\frac{M\bar M}{EJ} + \frac{N\bar N}{EF} + k\frac{T\bar T}{GF}\right) ds$, видимо да су десне

ПВС: $\sum \bar P_m \delta_m + \sum \bar C_i c_i = \int_s \left(\frac{M\bar M}{EJ} + \frac{N\bar N}{EF} + k\frac{T\bar T}{GF}\right) ds$ стране једнаке $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\sum P_m \bar\delta_m + \sum C_i c_i = \sum \bar P_m \delta_m + \sum \bar C_i c_i}$$ ТЕОРЕМА О УЗАЈАМНОСТИ РАДОВА!

ТЕКСТУАЛНО: Ако на носач делују 2 система спољашњих утицаја: силе P_m са померањима ослонаца и уклештења c_i и силе $\bar P_m$ са померањима $\bar c_i$, рад спољашњих сила P_m и C_i првог система утицаја при померањима која изазива други систем сила једнак је раду спољ. сила $\bar P_m$ и $\bar C_i$ другог система утицаја при померањима која изазива први систем утицаја.

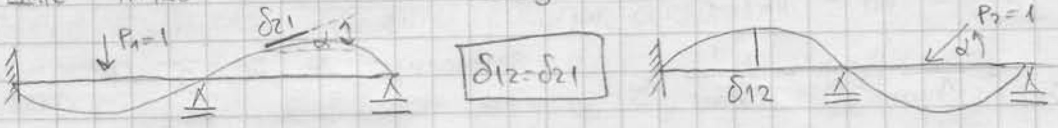
Ове теорема зове се још и Betti-јева теорема и помоћу ње искозујемо и остале 3 теореме

II ТЕОРЕМА О УЗАЈАМНОСТИ ПОМЕРАЊА (Maxwell-ова теорема о узајамности)

-Изводи се из теореме о узајамности радова (усвојено $P_m = 1$ и $\bar P_m = 1$) и добијамо $1\cdot\delta_{12} = 1\cdot\delta_{21} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\delta_{12} = \delta_{21}}$ теорема о узајамности померања!

-Ако на носач чији се ослонци не померају делују 2 јединичне силе P_1 и P_2 померање нападне тачке силе P_1 у правцу силе P_1 услед силе P_2 једнако је померању нападне тачке силе P_2 у правцу силе P_2 услед силе P_1.

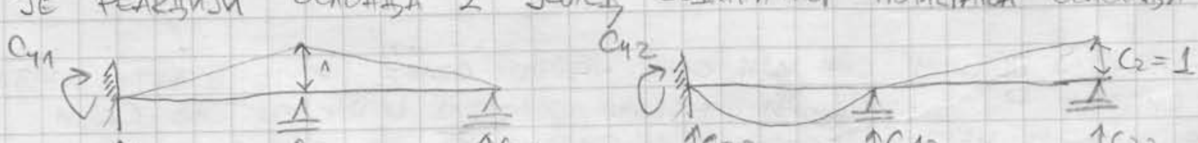


III ТЕОРЕМА О УЗАЈАМНОСТИ РЕАКЦИЈА (ПРВА РЕЈЛИЈЕВА ТЕОРЕМА)

-Посматрамо један неоптерећен статички неодређен носач и 2 стања на носачу. Прво је изазвано померањем ослонца C_1 за величину 1 ($C_1 = 1$), а друго је изазвано померањем ослонца C_2 за величину 1 ($C_2 = 1$).

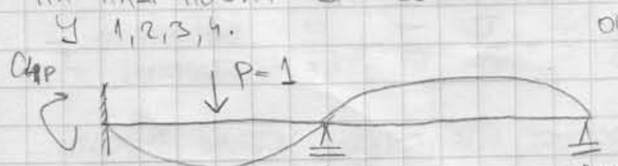
$1\cdot C_{12} = 1\cdot C_{21} \Rightarrow \boxed{C_{12} = C_{21}}$ ТЕОРЕМА О УЗАЈАМНОСТИ РЕАКЦИЈА

-Реакција ослонца 1 услед јединичног померања ослонца 2 једнака је реакцији ослонца 2 услед јединичног померања ослонца 1.

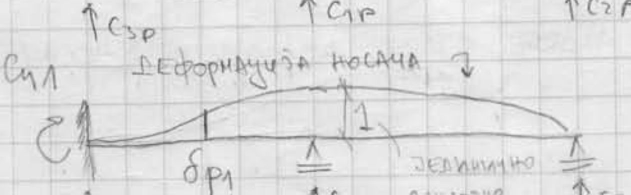


IV ТЕОРЕМА О УЗАЈАМНОСТИ РЕАКЦИЈА И ПОМЕРАЊА (II РЕЈЛИЈЕВА ТЕОРЕМА)

На наш носач делује сила $P=1$ услед ње јављају се реакције ослонаца у 1, 2, 3, 4.
ослонци носача се не померају!



$$1\cdot\underbrace{\delta_{1P}}_{=\delta_{P1}} + C_{1P}\cdot 1 = 0 \Rightarrow \boxed{C_{1P} = -\delta_{P1}}$$ IV ТЕОРЕМА



-Реакција ослонца 1 услед јединичне силе једнака је негативној вредности померања нападне тачке силе P услед јединичног померања ослонца.

23. Метода сила. Полазне ј-не и претпоставке, реакције ослонаца и силе у пресецима статички неодређеног носача, формирање основног система.

- СНН су носачи у којима реакције ослонаца, моменте укљештења и силе у пресецима НЕ МОЖЕМО ОДРЕДИТИ САМО ИЗ УСЛОВА РАВНОТЕЖЕ ТОГ НОСАЧА.

БР. УСЛОВА РАВНОТЕЖЕ НОСАЧА:

$$\left.\begin{aligned}&\sum S_{ik}\cos\alpha_{ik} - \sum \frac{M_{ki}-M_{ik}}{e_{ik}}\sin\alpha_{ik} + C_{oi}\cos\beta_i + H_i = 0\\ &\sum S_{ik}\sin\alpha_{ik} + \sum \frac{M_{ki}-M_{ik}}{e_{ik}}\cos\alpha_{ik} + C_{oi}\sin\beta_i + V_i = 0\end{aligned}\right\} 2K$$

$$\left.\sum \lambda_{ik} M_{ik} + C_{ui} + M_i = 0\right\} m$$

БР. Ј-НА $= \underline{2K+m}$

НЕПОЗНАТЕ:
z_o - реакције ослонаца
z_u - моменти укљешт.
z_s - силе S_{ik}
z_{k+m} - МОМЕНТИ M_{ik} и M_{ki}

УКУПНО: $z_s+z_k+z_o+z_u+m$

$\boxed{z_s+z_k+z_o+z_u+m > 2K+m}$ СНН!

РАЗЛИКА $(z_s+z_k+z_o+z_u+m)-(2K+m)$ ПРЕДСТАВЉА БР. НЕПОЗНАТИХ ВЕЛИЧИНА КОЈЕ МОЖЕМО ПРОИЗВОЉНО ИЗАБРАТИ А ДА УСЛОВИ РАВНОТЕЖЕ БУДУ ЗАДОВОЉЕНИ. ТЕ ВЕЛИЧИНЕ НАЗИВАМО <u>СТАТИЧКИ НЕЗАВИСНИМ ВЕЛИЧИНАМА</u> И ОБЕЛЕЖАВАМО ИХ СА $X_1, X_2, \dots, X_n$.

ЗАЊИХ МОЖЕМО БИРАТИ НЕКЕ ОД НЕПОЗНАТИХ $C_j\,(C_{oj}, C_{uj})$, S_{ik}, M_{ik} ИЛИ НЕКЕ ЛИНЕАРНЕ Ф-ЈЕ ТИХ ВЕЛИЧИНА.

$$\left.\begin{aligned}&F_1(C_j, S_{ik}, M_{ik}) = X_1\\ &F_2(C_j, S_{ik}, M_{ik}) = X_2\\ &\vdots\\ &F_n(C_j, S_{ik}, M_{ik}) = X_n\end{aligned}\right\}$$

ДА БИ $X_1, \dots, X_n$ БИЛЕ СТАТИЧКИ НЕЗАВИСНЕ ФУНКЦИЈЕ F МОРАЈУ ДА БУДУ МЕЂУСОБНО НЕЗАВИСНЕ И НЕЗАВИСНЕ ОД УСЛОВА РАВНОТЕЖЕ

Слободни чланови услова равнотеже су H_i, V_i, M_i а слободни чланови горњих Ј-на су $X_1, X_2, \dots, X_n$.
зависе од оптерећења p

Онда решења ова 2 система Ј-на можемо приказати као линеарне функције оптерећења p и величина $X_1, X_2, \dots, X_n$.

- $C_{j,0}$; $S_{ik,0}$; $M_{ik,0}$ су решења овог система кад је $p\neq 0$, $X_1=X_2=\dots X_n=0$
- $C_{j,1}$; $S_{ik,1}$; $M_{ik,1}$ су решења кад је $p=0$, $X_1=1$, $X_2=X_3=\dots X_n=0$
- $C_{j,2}$; $S_{ik,2}$; $M_{ik,2}$ —″— —″— $p=0$ $X_1=0$, $X_2=1$, $X_3=X_4=\dots X_n=0$

$\vdots$

$C_{j,n}$; $S_{ik,n}$; $M_{ik,n}$ —″— —″— $p=0$ $X_1=\dots X_{n-1}=0$ $X_n=1$

општа решења ових Ј-на могу да се прикажу у облику:

$$C_j = C_{j,0} + X_1 C_{j,1} + X_2 C_{j,2} + \dots + X_n C_{j,n}$$

$$S_{ik} = S_{ik,0} + X_1 S_{ik,1} + X_2 S_{ik,2} + \dots + X_n S_{ik,n}$$

$$M_{ik} = M_{ik,0} + X_1 M_{ik,1} + X_2 M_{ik,2} + \dots + X_n M_{ik,n}$$

- ВЕЛИЧИНЕ $C_{j,0}$; $S_{ik,0}$; $M_{ik,0}$ СУ РЕАКЦИЈЕ ОСЛОНАЦА, МОМЕНТИ УКЉЕШТЕЊА И СТАТИЧКИ НЕЗАВИСНЕ ВЕЛИЧИНЕ ШТАПОВА КАД ЈЕ НОСАЧ оптерећен оптерећењем p, а када су све статички независне величине носача нула!

- Величине $C_{j,m}$; $M_{ik,m}$; $S_{ik,m}$ (за $m=1,2,\dots,n$) су реакције ослонаца, моменти уклештења и статичке независне величине штапова када је $p=0$, $X_m=1$ а све остале статичке независне величине једнаке нули!

Можемо написати изразе за силе у пресеку у функцији статички неодређ. величина

$N = N_0 + X_1 N_1 + X_2 N_2 + \dots + X_n N_n$ $\qquad N_0, T_0, M_0 \quad p\neq 0 \quad X_i=0$

$T = T_0 + X_1 T_1 + X_2 T_2 + \dots + X_n T_n$ $\qquad N_1, T_1, M_1 \quad p=0 \quad X_1=1 \quad X_2 \dots X_n=0$

$\vdots$

$M = M_0 + X_1 M_1 + X_2 M_2 + \dots + X_n M_n$ $\qquad N_n, T_n, M_n \quad p=0 \quad X_1,\dots,X_{n-1}=0 \quad X_n=1$

- Систем који добијамо кад из датог СНН уклонимо везе чије смо реакције изабрали за статички неодређене величине називамо <u>основни систем тог носача</u> (СОН).

- Утицаји у основном систему биће једнаки утицајима у датом статички неодређеном систему кад у њему уклоњене везе заменимо њиховим реакцијама X_1 до X_n.

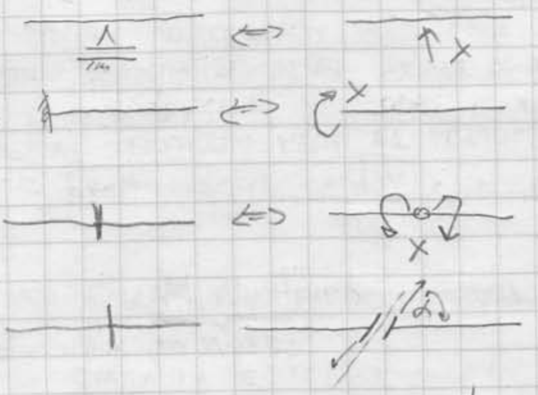
- <u>За формирање основног система постоје 4 могућности:</u>

I Уклањамо ослонац

II —||— уклештење

III —||— круту везу

IV



Круту везу замењујемо клизајућим зглобом.

24. Метода сила. Условне ј-не за статички неодређене величине.

Статички неодређене величине одређујемо из услова компатибилности деформација носача.

Услови компатибилности померања чворова:

$F_1(i,k) = \Delta l_{ik} \quad \dots z_1$

$F_2(i,k) - F_2(i,r) = \tau_{ir} - \tau_{ik} \quad \dots z_k$

$u_i \cos\beta_i + v_i \sin\beta_i = c_{oi} \quad \dots z_0$

$F_2(i,k) = \omega_i - \tau_{ik} \quad \dots z_u$

Из ових ј-на елиминишемо 2к померања и и добијамо $(z_1+z_k+z_0+z_u) - 2k$ ј-на у којим фигуришу само деформ. величине штапова (Δl_{ik}, τ_{ik}) и померања осл. c_0 и обрт. уклештења

Ови услови представљају услове компатибилности деформ. датог носача.

У те услове уносимо сл. ј-не:

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta l_{ik} = \int_i^k \varepsilon\, ds \\ \tau_{ik} = \frac{1}{l_{ik}} \int_i^k \left(\frac{\bar{s}}{l} l_{ik} \kappa - \gamma_T\right) ds \\ \tau_{ki} = -\frac{1}{l_{ik}} \int_i^k \left(\bar{s}\, l_{ik} \kappa + \gamma\right) ds \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l} \kappa = \frac{M}{EI} + \alpha_t \frac{\Delta t^\circ}{h} \\ \varepsilon = \frac{N}{EF} + \alpha_t t^\circ \\ \gamma_T = k \frac{T}{GF} \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l} N = N_0 + \sum_{k=1}^{n} X_k N_k \\ T = T_0 + \sum_{k=1}^{n} X_k T_k \\ M = M_0 + \sum_{k=1}^{n} X_k M_k \end{array}\right\}$$

- РЕШЕЊЕМ ГОРЊИХ Ј-НА НАЛАЗИМО СТАТИЧКИ НЕОДРЕЂЕНЕ ВЕЛИЧИНЕ НОСАЧА!

- ОПИСАНИ ПОСТУПАК ДА СЕ ИСПИШУ ПРЕТХОДНЕ Ј-НЕ ЈЕ ЕЛЕМЕНТАРАН, АЛИ ПРЕДУГАЧАК И НЕ КОРИСТИ СЕ ЗА КОМПЛИКОВАНИЈЕ СНН!

СТАТИЧКИ НЕОДРЕЂЕНЕ ВЕЛИЧИНЕ МОЖЕМО ОДРЕДИТИ И ПРИНЦИПОМ ВИРТУАЛНИХ СИЛА:

ОВА Ј-НА ВАЖИ ЗА СТАЊЕ $\boxed{X_i=1} \Longleftrightarrow \boxed{\sum C_{ji} c_j = \int_s (M_i \varkappa + N_i \varepsilon + T_i \gamma_T)\, ds}$

У ТУ Ј-НУ УБАЦУЈЕМО ВРЕДНОСТИ ЗА $\varkappa, \varepsilon, \gamma_T$ и N, T, M И ДОБИЈАМО:

$$\sum C_{ji} c_j = \int_s \left\{ M_i \left[\frac{1}{EJ}\left(M_0 + \sum_{k=1}^{n} X_k M_k\right) + \alpha_t \frac{\Delta t^\circ}{h}\right] + N_i \left[\frac{1}{EF}\left(N_0 + \sum_{k=1}^{n} X_k N_k\right) + \alpha_t t^\circ\right] + T_i \frac{k}{GF}\left(T_0 + \sum_{k=1}^{n} X_k T_k\right)\right\} ds$$

, ОДНОСНО ДАЉОМ ТРАНСФОРМАЦИЈОМ ДОБИЈАМО

$$\Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{n} X_k \left(\int_s \frac{M_i M_k}{EJ} ds + \int_s \frac{N_i N_k}{EF} ds + \int_s k \frac{T_i T_k}{GF} ds\right) + \left(\int_s \frac{M_i M_0}{EJ} ds + \int_s \frac{N_i N_0}{EF} ds + \int_s k \frac{T_i T_0}{GF} ds\right)$$

$$+ \left(\int_s M_i \alpha_t \frac{\Delta t^\circ}{h} ds + \int_s N_i \alpha_t t^\circ ds\right) - \sum C_{ji} c_j = 0$$

, ИЗ ОВЕ Ј-НЕ ЗА $i=1,2,\dots,n$ ДОБИЈАМО СИСТЕМ ОД n ЈЕДНАЧИНА СА n НЕПОЗНАТИХ X_1 до X_n

ОВАЈ СИСТЕМ Ј-НА ПРЕДСТАВЉА УСЛОВНЕ Ј-НЕ ЗА СТАТИЧКИ НЕОДРЕЂЕНЕ ВЕЛИЧИНЕ. СА ОЗНАКАМА:

$$\delta_{ik} = \int_s \frac{M_i M_k}{EJ} ds + \int_s \frac{N_i N_k}{EF} ds + \int_s k \frac{T_i T_k}{GF} ds \qquad \delta_{i\otimes} = \delta_{i0} + \delta_{it} + \delta_{ic}$$

$$\delta_{i0} = \int_s \frac{M_i M_0}{EJ} ds + \int_s \frac{N_i N_0}{EF} ds + \int_s k \frac{T_i T_0}{GF} ds ,$$

ОНЕ МОГУ КРАТКО ДА СЕ НАПИШУ:

$$\delta_{it} = \int_s M_i \alpha_t \frac{\Delta t^\circ}{h} ds + \int_s N_i \alpha_t t^\circ ds \qquad \sum_{k=1}^{n} X_k \delta_{ik} + \delta_{i\otimes} = 0, \quad i = 1,2,\dots,n$$

$$\delta_{ic} = -\sum C_{ji} c_j$$

ИЛИ РАЗВИЈЕНО У ОБЛИКУ:

$$\begin{aligned} X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + \dots + X_n \delta_{1n} + \delta_{1\otimes} &= 0 \\ X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + \dots + X_n \delta_{2n} + \delta_{2\otimes} &= 0 \\ &\vdots \\ X_1 \delta_{n1} + X_2 \delta_{n2} + \dots + X_n \delta_{nn} + \delta_{n\otimes} &= 0 \end{aligned}$$

ИЛИ У МАТРИЧНОМ ОБЛИКУ:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}}_{X} + \underbrace{\begin{bmatrix} \delta_{1\otimes} \\ \delta_{2\otimes} \\ \vdots \\ \delta_{n\otimes} \end{bmatrix}}_{d} = 0, \quad DX + d = 0 \qquad \delta_{ik} = \delta_{ki} \Rightarrow$$

D матрица симетрична

$$D = [\delta_{ik}]$$

ЕЛЕМЕНТИ ГЛАВНЕ ДИЈАГОНАЛЕ МАТРИЦЕ D: $\delta_{ii} = \int_s \frac{M_i^2}{EJ} ds + \int_s \frac{N_i^2}{EF} ds + \int_s k \frac{T_i^2}{GF} ds$ И УВЕК СУ >0!

ВАНДИЈАГОНАЛНИ ЕЛЕМЕНТИ МОГУ БИТИ $\delta_{ik} \lesseqgtr 0, \quad i \neq k$

КАДА ЈЕ $\delta_{ik} = 0$ за стања $X_i = 1$ и $X_k = 1$ кажемо да су међусобно ортогонална.

ОВЕ Ј-НЕ ВАЖЕ ЗА ПРОИЗВОЉАН ПУН НОСАЧ.

ЗА РЕШЕТКАСТ НОСАЧ (чији штапови примају само аксијалне силе) Принцип виртуалних сила за $X_i=1$ тасн.

Аксиј. сила у ш. при стању $X_i=1$

$$\sum C_{ji} c_j = \int_s N_i \varepsilon ds = \sum_s U_i \int_s \varepsilon ds \quad \text{односно} \quad \sum C_{ji} c_j = \sum_s S_i \Delta l, \quad \Delta l = \frac{Sl}{EF} + \alpha_t t^\circ l$$

сила у ш. може да се напише: $S = S_0 + \sum_{k=1}^{m} X_k S_k$

слично као пре добијамо $\sum_j C_{ji} c_j = \sum_s S_i \left\{\frac{l}{EF}\left(S_0 + \sum_{k=1}^{m} X_k S_k\right) + \alpha_t t^\circ l\right\}$

односно $\sum_k X_k \left(\sum_s \frac{S_i S_k}{EF} l\right) + \sum_s \frac{S_i S_0}{EF} l + \sum_s S_i \alpha_t t^\circ l - \sum C_{ji} c_j = 0$, $i=1,2,m$

са ознакама: $\delta_{ik} = \sum_s \frac{S_i S_k}{EF} l$, $\delta_{i0} = \sum_s \frac{S_i S_0}{EF} l$, $\delta_{it} = \sum_s S_i \alpha_t t^\circ l$, $\delta_{ic} = -\sum C_{ji} c_j$

25. Метода сила. Физичко значење коефицијената условних ј-на, утицајне линије за статички неодређене величине и реакције ослонаца, силе у пресецима и померања статички неодређеног носача.

δ_a - померање у статички неодређеном носачу на месту a услед задатих спољашњих утицаја

δ_{a0} - померање у основном систему услед оптерећења p

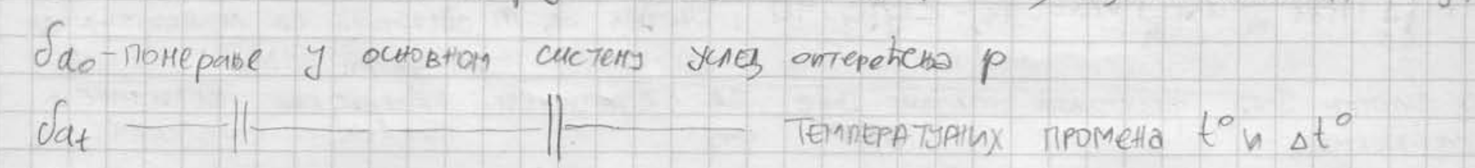
δ_{at} ″ ″ температурних промена t° и Δt°

δ_{ac} ″ ″ ″ померања ослонаца c_i

δ_{ak} ″ ″ ″ силе $X_k = 1$, $k = 1, 2, \dots, m$ (остале силе су 0!

$$\delta_a = \underbrace{\delta_{a0} + \delta_{at} + \delta_{ac}}_{\delta_{a\otimes}} + X_1 \delta_{a1} + \delta_{a2} X_2 + \dots + \delta_{am} X_m \Leftrightarrow \delta_a = \delta_{a\otimes} + \sum_{k=1}^{m} X_k \delta_{ak}$$

- Условне ј-не за статички неодређене величине добијамо кад уочимо да у статит. неодр. носачу генер. померања δ_i $(i=1,2,\dots,m)$ која одговарају изабраним величинама X_i морају бити 0.



$$\sum_{k=1}^{m} X_k \delta_{ik} + \delta_{i\otimes} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Из условних ј-на за стат. неодређ. величине једног m-пута СНН $\sum_{k=1}^{m} X_k \delta_{ik} + \delta_{i0} = 0$ $i=1,2,\dots$

δ_{i0} и X_k се могу написати у функцији слободних чланова и елемената инверзне матрице. $\boxed{X_k = -\sum_{i=1}^{m} \beta_{ki} \cdot \delta_{i0}}$ $k = 1, 2, \dots, m$

- Десну стр. ј-не схватимо као утицајну линију за генерел. померање δ_k.

Кад су познате у.л. за статички неодређене величине X_k, у.л. за остале статичке утицаје Z, за реакције ослонаца, реакције укљештења и силе у пресецима СНН налазимо на основу принципа суперпозиције.

$$\boxed{Z = Z_0 + \sum_{k=1}^{m} Z_k X_k}$$

Z_0 – у.л. за утицај Z у основном систему

Z_k – вредност утицаја Z у основном систему при стању $X_k=1$, $k=1,2,..,m$

X_k – у.л. за статички неодређ. величину X_k, $k=1,..,m$

у.л. за померања δ у СНН одређују се суперпозицијом

$$\boxed{\delta = \delta_0 + \sum_{k=1}^{m} \delta_k X_k}$$

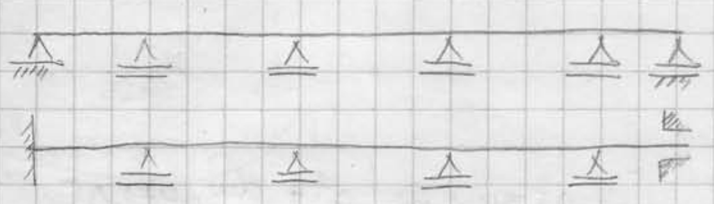
δ_0 – у.л. за померање δ у основном систему

δ_k – вредност померања δ у — // — при стању $X_k=1$, $k=1,2,..,m$

X_k – у.л. за стат. неодр. величину X_k, $k=1,2,..,m$

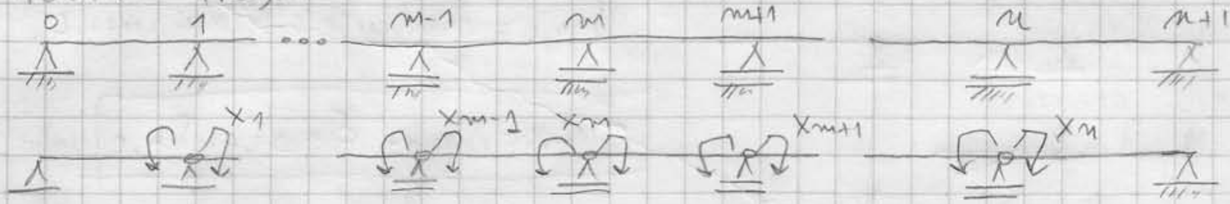
26. Континуални носачи. Избор основног система, условне ј-не, физичко значење коефицијената условних ј-на, појам леве и десне сталне тачке.

– Носач који се састоји од једног правог ш. у коме је бр. спољ. елемената, тј. бр. ослонаца z_0 и бр. укљештења z_u, већи од три $z_0+z_u>3$ назива се континуалан носач.



Бр међуослонаца је бр статичке неодређености тог носача.

– Континуалан носач представља m пута статички неодређен носач, за статички неодређене величине $X_1,..,X_m$ редовно усвајамо моменте савијања у пресецима изнад међуослонаца, тако да је основни систем низ међусобно зглавкасто везаних простих греда.



Условне ј-не за стат. неодр. величине описане су системом трочланих ј-на:

$$X_{n-1}\delta_{n,n-1} + X_n\delta_{nn} + X_{n+1}\delta_{n,n+1} + \delta_{n0} = 0 \qquad n=1,2,..,m$$

У првој ($n=1$) и последњој ј-ни ($n=m$) прелази у систем двочланих ј-на.

Коефицијенти и слободан члан у ј-ни су:

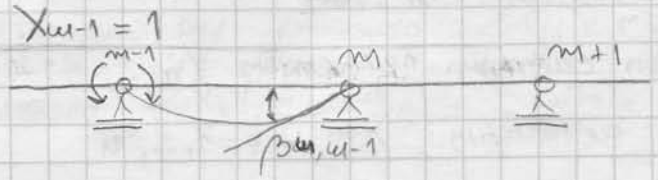
$\delta_{n,n-1} = \beta_{n,n-1}$ $\qquad$ $\delta_{n,n+1} = \beta_{n,n+1}$

$\delta_{nn} = \alpha_{n,n-1} + \alpha_{n,n+1}$ $\qquad$ $\delta_{n0} = \alpha_{n,n-1,0} + \alpha_{n,n+1,0}$

па m-та ј-на може да се прикаже у облику:

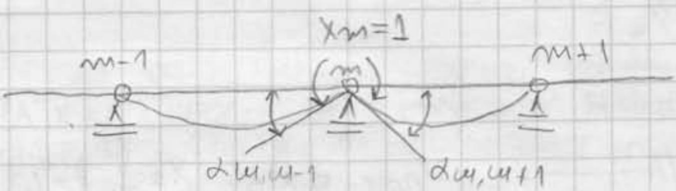
$$X_{m-1}\beta_{mm} + X_m(\alpha_{m,m-1}+\alpha_{m,m+1}) - X_{m+1}\beta_{m,m+1} + \alpha_{m,m-1,0}+\alpha_{m,m+1,0}=0 \quad (A)$$

Физичко значење: Ако посматрамо деформисање греде при $X_{m-1}=1$, под дејством момента ће се деформисати, па ћемо добити деформационе углове.

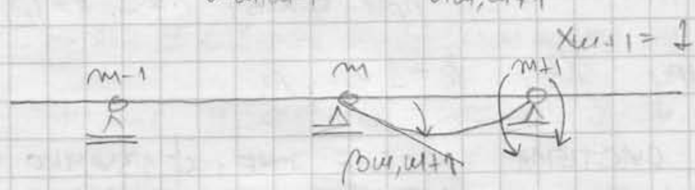


$\delta_{m,m-1}$ обртање поп. пресека на месту m услед $X_{m-1}=1$.

тј. $\delta_{m,m-1}=\beta_{m,m-1}$ – деформациони угао

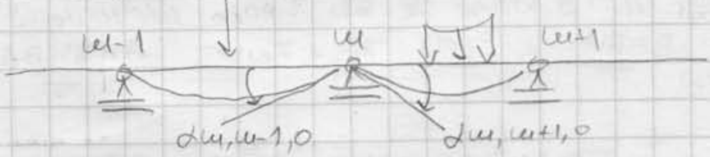


$\delta_{m,m}$ – генералисано померање на месту m услед $X_m=1$, а то је обртање поп. пресека лево и десно од чвора m, тј $\delta_{m,m}=\alpha_{m,m-1}+\alpha_{m,m+1}$



$\delta_{m,m+1}=\beta_{m,m+1}$

оптерећење

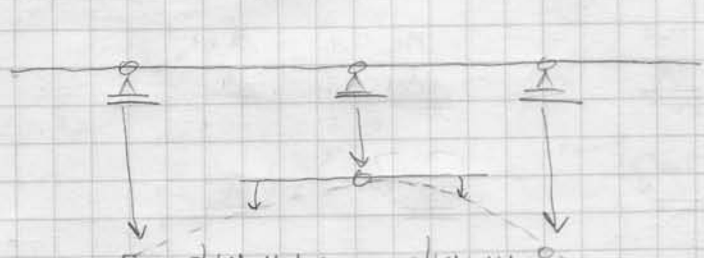


$\delta_{m,0}=\alpha_{m,m-1,0}+\alpha_{m,m+1,0}$

температурна разлика

$\delta_{m,\Delta t}=\alpha_{m,m-1,\Delta t}+\alpha_{m,m+1,\Delta t}$

померање ослонаца

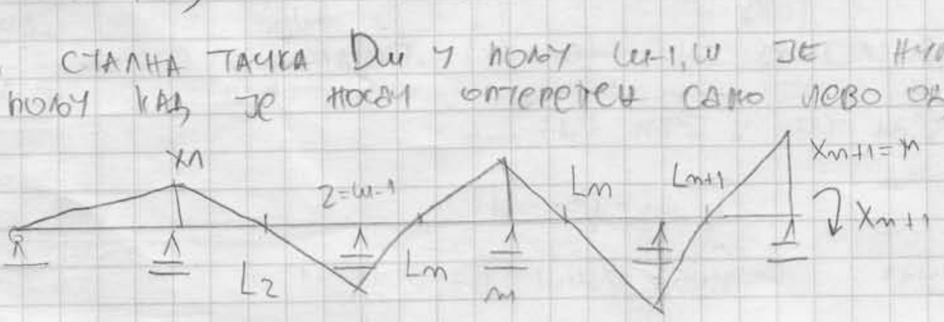


$\delta_{m,c}=\alpha_{m,m-1,c}+\alpha_{m,m+1,c}$

$$\boxed{\delta_{m\otimes}=\delta_{m,0}+\delta_{m,\Delta t}+\delta_{m,c}}$$

Лева стална тачка L_m у пољу m−1, m је нулта тачка момената у том пољу кад је носач оптерећен само десно од тог поља.

Десна стална тачка D_m у пољу m−1, m је нулта тачка момената у том пољу кад је носач оптерећен само лево од тог поља.



сл. за D_m само што је M са леве стране

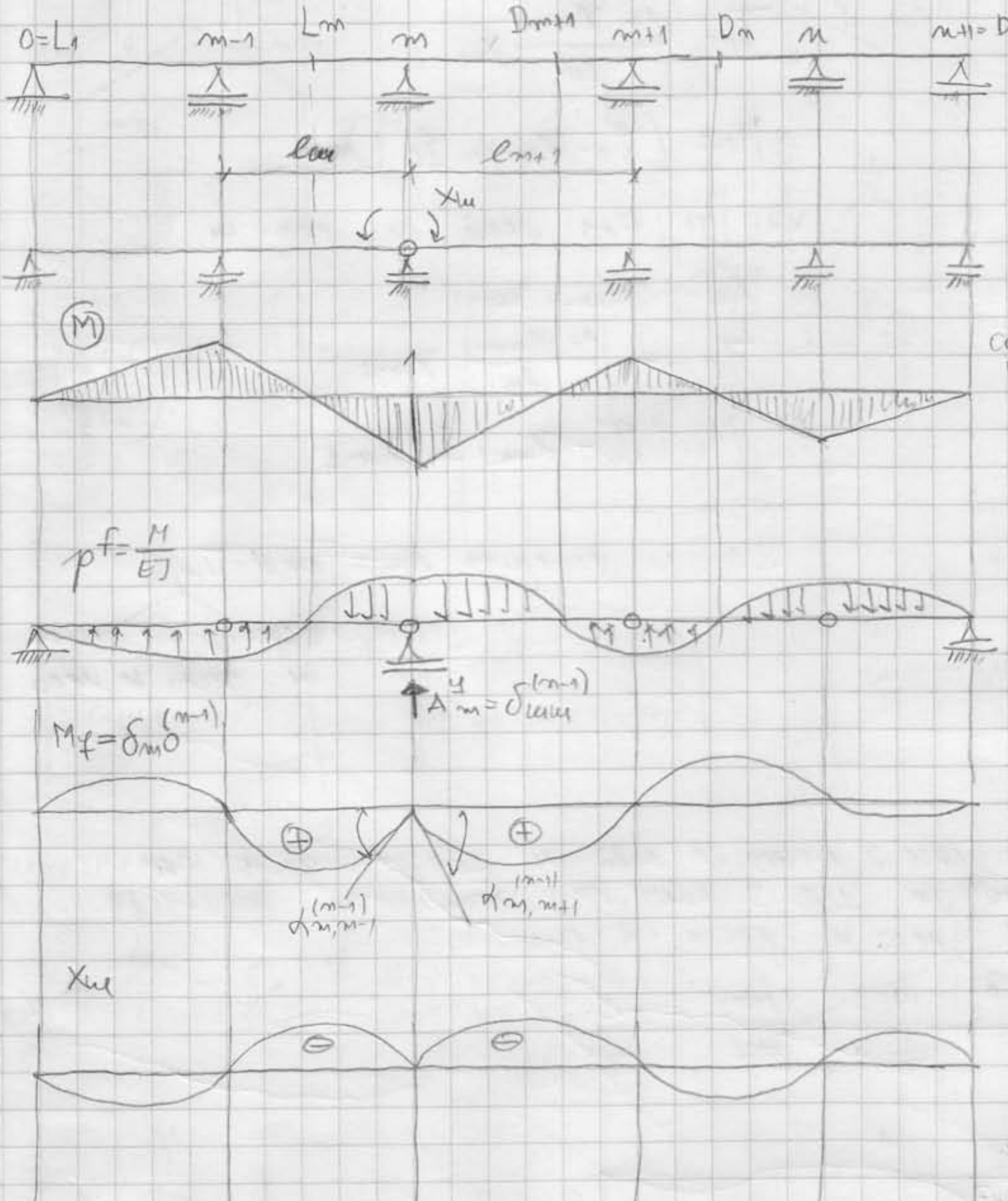
27. Конструкција у.л. код континуалних носача.

У.Л. за статички неодређене величине X_m, $m=1,2,\dots,M$, у M-пута статички неодређеном континуалцу могу се одредити као дијаграми померања у одговарајућем $(M-1)$ пут СНН.

- Да бисмо одредили у.л. за момент савијања X_m над ослонцем m, круту везу штапова над ослонцем m замењујемо моментним зглобом. Тиме смо од M-пута стат. неодређеног континуалца добили $(M-1)$ пут СНН коме одговара условна ј-на: $$X_m \delta_{mm}^{(M-1)} + \delta_{m0}^{(M-1)} = 0$$

где $\delta_{mm}^{(M-1)} = \alpha_{m,m-1}^{(M-1)} + \alpha_{m,m+1}^{(M-1)}$ представља промену угла између попречних пресека поред зглоба m

а $\delta_{m0}^{(M-1)}$ у.л. за промену истог угла при стању $X_m = 1$.



Вредности момената на осталим ослонцима добијамо из сл. ј-на:

$X_m = -\varkappa_{m,m+1} X_{m+1}$ (десно од поља $m+1$)

$X_m = -\varkappa_{m,m-1} X_{m-1}$ (за положај силе лево од поља m)

где су: $\varkappa_{m,m+1} = \frac{\delta_{m,m+1}}{\delta_{mm}^{(M-1)}}$

$\varkappa_{m,m-1} = \frac{\delta_{m,m-1}}{\delta_{mm}^{(M-1)}}$

Вредности $\delta_{mm}^{(M-1)}$ односно $\delta_{m0}^{(M-1)}$ одређујемо као фиктивну реакцију A^f_m односно као фиктиван моменат M^f фикт. носача услед оптерећења фикт. $p^f = \frac{M}{EJ}$. $\delta_{mm}^{(M-1)} = A^f_m$

$A^f_m = -T^f_{m,l} + T^f_{m,d}$

У.Л. за моменат X_m добијамо множењем ордината дијаграма M^f са негативном вредношћу $\beta_{mm} = \frac{1}{\delta_{mm}^{(M-1)}}$

- Видимо да у пољима m и $m+1$ ординате у.л. за X_m су ⊖, а лево и десно од тих поља наизменично мењају знак!

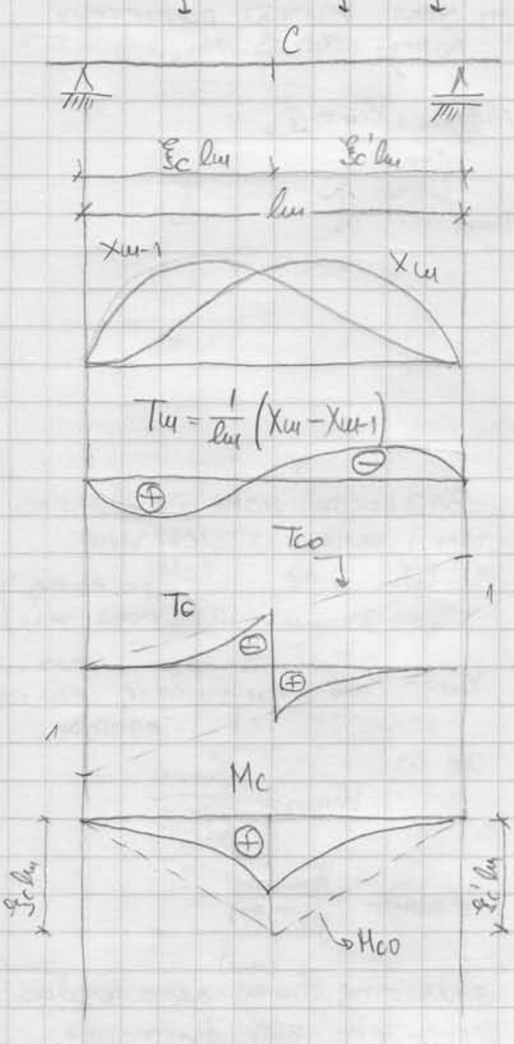
- У.Л. за силе у неком пресеку C поља m континуалног носача одређено по формула: $T_C = T_{C0} + \frac{1}{l_m}(X_m - X_{m-1}) = T_{C0} + T_m$; $M_C = M_{C0} + X_{m-1}\xi_C' + X_m \xi_C$

T_{C0}, M_{C0} - у.л. за силе у пресеку C просте греде распона l_m

X_{m-1}, X_m - у.л. за статички неодређене величине на крајевима поља m

T_m - у.л. за трансверзалну силу у пољу m

Кад се јединична сила налази у пољу m:



Кад је P=1 десно од поља m:

$X_{m-1} = -\varkappa_{m-1,m} X_m$

$T_C = \frac{1+\varkappa_{m-1,m}}{l_m} X_m$

$M_C = (\xi_C - \varkappa_{m-1,m}\xi_C') X_m$

Кад је P=1 лево од поља m

$X_m = -\varkappa_{m,m-1} X_{m-1}$

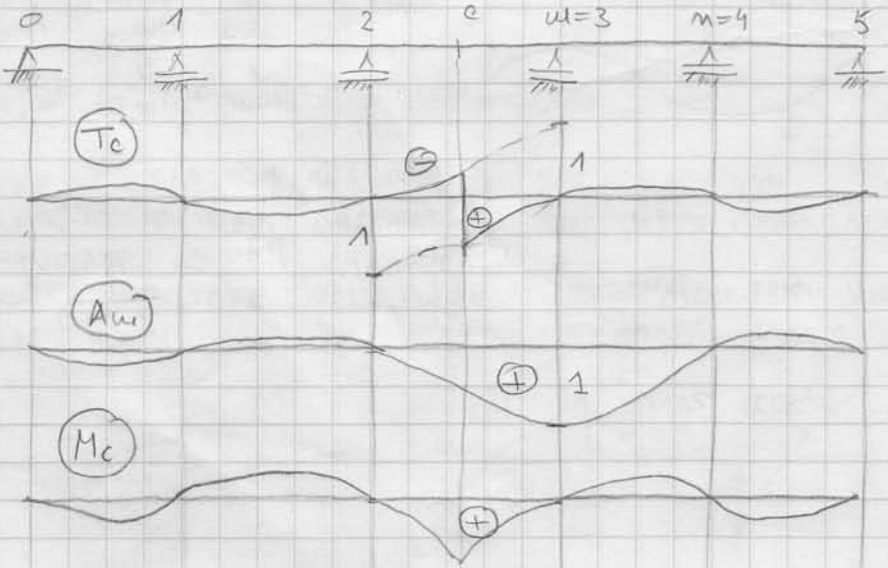
$T_C = -\frac{1+\varkappa_{m,m-1}}{l_m} X_{m-1}$

$M_C = (\xi_C' - \varkappa_{m,m-1}\xi_C) X_{m-1}$

У.Л за реакцију $A_m = T_{m,d} - T_{m,l}$

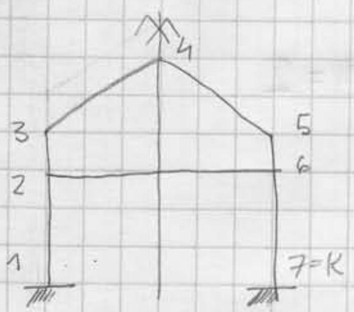
пресеци бесконачно близу m десно и лево

- Да бисмо нацртали У.Л. за силе у пресеку C поља m континуалца за све положаје P=1 потребно је У.Л. у пољу m продужити користећи формуле кад је P=1 лево и десно од поља m.



28. Симетрични носачи

- За носач можемо рећи да је симетричан ако су сви његови елементи симетрично распоређени у односу на 1 или више оса симетрије и када су димензије симетричних поп. пресека међусобно исте.

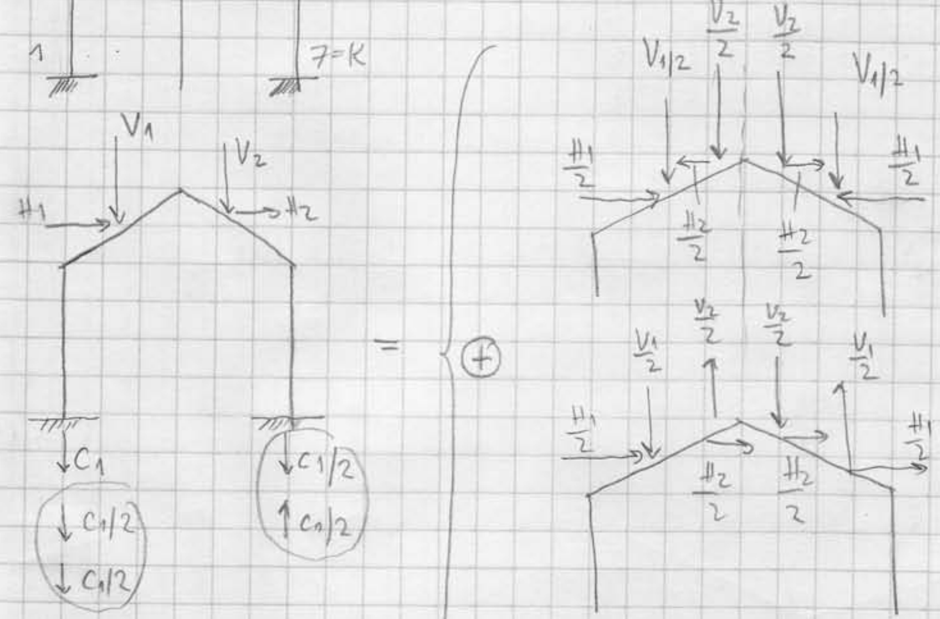


$2K=14,\quad Z_s=7\quad Z_o=4$

$Z_k=7,\quad Z_u=2$

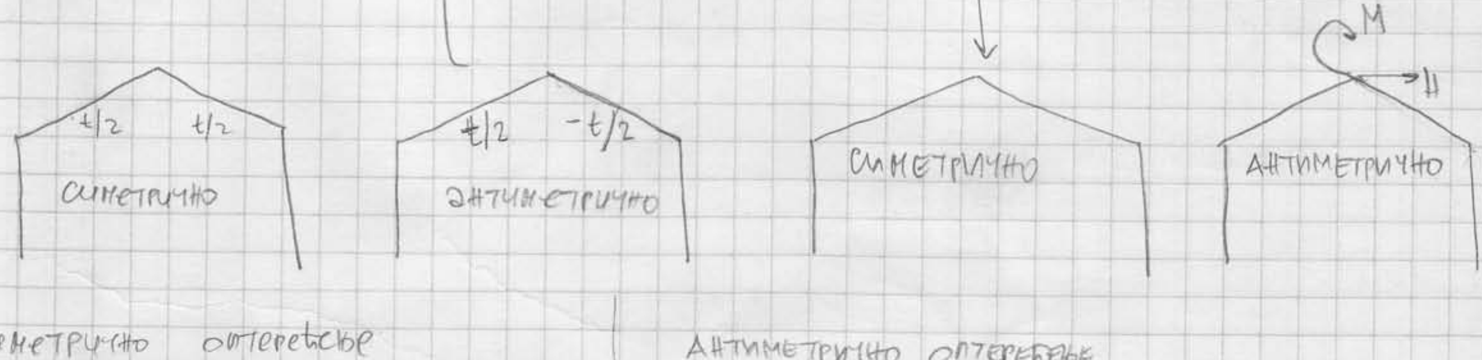
20

$n=20-14=6$

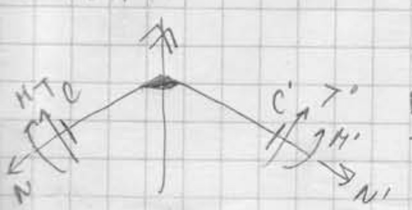


симетрично оптерећење

антиметрично оптерећење



симетрично оптерећење

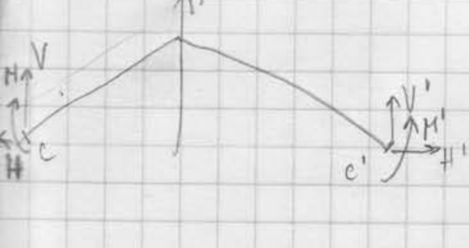


$M=M'$

$N=N'$

$T=-T$

M и N су у носачу симетрични а T антиметрични утицаји



$M-M'=0$

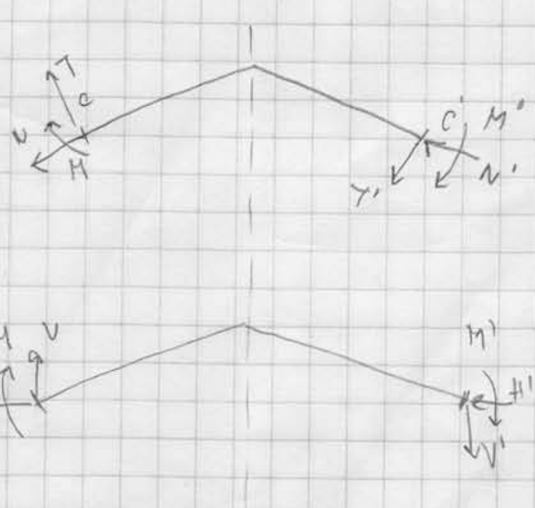
$H-H'=0$

$V+V'=0$

$V_s=0$

$T_s=0$

АНТИМЕТРИЧНО ОПТЕРЕЋЕЊЕ



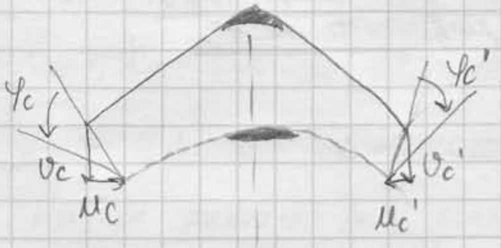
$H_s=0$

$M_s=0$

$N_s=0\quad M_s=0$

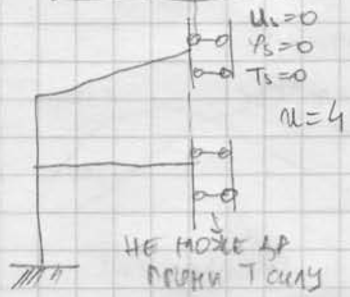
* ПОМЕРАЊЕ СИМ. НОСАЧА:

1° ПРИ СИМ ОПТ:



$v_c = v_c'$ $u_c = -u_c'$ $\varphi_c = -\varphi_c'$

$\boxed{u_s = 0 \quad \varphi_s = 0}$



2° ПРИ АНТИМ. ОПТ

$\boxed{\begin{array}{l} v_s = 0 \\ N_s = 0 \\ M_s = 0 \end{array}}$